МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

МІЖНАРОДНИЙ ЕКОНОМІКО-ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім.акад. С.Дем'янчука

Р.М.Літнарович

ОСНОВИ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

КУРС ЛЕКЦІЙ

Частина 1

Рівне,2008

Літнарович Р.М. Основи наукових досліджень.Курс лекцій. Частина 1. МЕГУ,2008, – 75 стор.

Рецензенти: В.Г. Бурачек, доктор технічних наук, професор
Є.С. Парняков, доктор технічних наук, професор
В.О. Боровий, доктор технічних наук, професор

Відповідальний за випуск Й.В. Джунь, доктор фізико-математичних наук, професор

Дається обґрунтування способу найменших квадратів для побудови економіко-математичних моделей за результатами економічної і фінансової діяльності підприємств, фірм , торгівлі.

Розробляється методика вибору формул для апроксимації матеріалів експериментальних даних.

Приводиться теорія визначення параметрів емпіричних формул.

Акцентується увага на визначення параметрів функціональної залежності загального виду по способу найменших квадратів (складання початкових умовних рівнянь, рівнянь поправок і нормальних рівнянь).

Значна увага приділяється рішенню нормальних рівнянь і оцінці точності зрівноважених елементів.

Для студентів і аспірантів економічних і математичних факультетів ВНЗ.

Зміст

Передмова
Лекція 1. Суть і обґрунтування способу найменших квадратів для побудови економіко-математичних моделей
Лекція 2. Вибір формули за результатами експериментальних даних
Лекція 3. Визначення параметрів емпіричних формул
Лекція 4. Визначення параметрів функціональної залежності загального виду по способу найменших квадратів (складання рівнянь поправок і нормальних рівнянь)
Лекція 5. Рішення нормальних рівнянь за допомогою визначників
Лекція 6. Рішення системи нормальних рівнянь по схемі Гауса
Лекція 7. Визначення коефіцієнтів нормальних рівнянь кубічного поліному
Лекція 8. Оцінка точності результатів експериментальних даних і їх апроксимації
Лекція 9. Дослідження точності середньої квадратичної похибки
Література

№7. Розрахунок істинних похибок заданої нормованої точності при $n = 10$ (Лекція 9)
№8. Контрольний розрахунок результатів зрівноваження (Лекція 9)

Передмова

Будь-яка математична модель є сукупністю співвідношень між чинниками, що впливають на цю модель і врахування яких, на думку створювачів моделі, є обов’язковим.

До математичної моделі відносять також функції, значення яких виражають певні кількісні оцінки наслідків прийняття будь-якого із альтернативних рішень. Такі функції застосовують для порівнювання між собою можливих рішень, і тому їх називають *критеріальними функціями.*

Для створення математичної моделі необхідно:

1. Вибрати факторні X , що впливають на результуючі У ознаки.
2. Дослідити питання щодо обчислення значень цих чинників і доступності інформації про ці значення.
3. Встановити характер зв’язків між чинниками, визначити їх вплив на досягнення мети при побудові моделі.
4. До створення математичної моделі вже на другому і третьму етапах долучаються математики. Після побудови цієї моделі саме вони аналізують її властивості, а із множини альтернативних рішень вибирають прийнятні і пропонують їх для впровадження.

Матеріал даного курсу буде корисним майбутнім економістам і математикам , тому що він формує математичну базу для обробки матеріалів при проведенні досліджень в економічній і фінансовій діяльності підприємств, фірм, торгівлі, тощо.

В даному курсі даються теоретичні основи обробки матеріалів експерименту.

Цей теоретичний курс дає можливість будувати економіко-математичні моделі ,самостійно проводити дослідження точності апроксимації результатів економіко-фінансової діяльності методом статистичних випробувань Монте-Карло на практичних заняттях.

Результатом вивчення курсу будуть самостійні авторські розробки молодих вчених-дослідників.

Лекція 1. Суть і обґрунтування способу найменших квадратів для побудови економіко-математичних моделей

1.1. Обґрунтування способу найменших квадратів

Конкретний зміст задачі обробки експериментальних матеріалів заключається в слідуючому:

Маючи ряд числових значень фактичних матеріалів факторних ознак X_i і результативних ознак Y_i, необхідно вивести формулу функціональної залежності Y_i від X_i, тобто встановити функцію $y = f(x)$.

При цьому слід :

1. Знайти функцію, за допомогою якої кращим чином описувалась би залежність *Y* від *X*.
2. Визначити найбільш підходящі числові значення коефіцієнтів, які входять у формулу.
3. Виконати аналіз точності отриманих результатів.
4. Якщо існує декілька видів формул, якими можна описати залежність між *X* і *Y*, то відібрати на основі аналізу оптимальну, яка найкращим чином апроксимує (наближує) результати обчислень за формулою з експериментальними даними.

Якщо загальний вигляд формули залежності відомий наперед або може бути встановлений із теоретичних міркувань, тоді задача зводиться до визначення і оцінки точності числового значення одного або декількох параметрів залежності.

У більшості випадків вид залежності невідомий наперед, і його приходиться підбирати за результатами експериментальних даних – тестувань, експертних оцінок тощо. Така, взагалі говорячи, непроста задача ускладнюється ще наявністю випадкових похибок, які спотворюють результати експерименту. Методику підбору виду залежності за результатами експериментальних досліджень розглянемо пізніше.

1.2. Визначення ймовірних значень параметрів. Постановка задачі.

Задача визначення ймовірнішиих значень параметрів залежності між результатами експериментальних досліджень може бути виконана різними способами. Кращим із них є спосіб найменших квадратів, оснований на тому, що випадкові похибки експериментальних даних підкоряються нормальному закону розподілу, який виражається формулою

$$f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}, \tag{1.1}$$

де функція $f(x)$ є щільністю (плотностью) ймовірності випадкових похибок експериментальних даних; параметр h, постійний для кожного конкретного випадку, носить назву *міри точності*.

Нехай маємо ряд експериментальних даних $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ і $X_1, X_2, ..., X_n$, зв'язаних залежністю $y = f(x)$.

Позначимо ймовірніше значення Y_i через $\varphi(X_i)$. Тоді ймовірніші похибки або відхилення експериментальних значень функції від її ймовірніших значень можна записати у вигляді:

$$Y_i - \varphi(X_i) = V_i. \tag{1.2}$$

Підберемо ймовірніші значення $\varphi(X_i)$ таким чином, щоб ймовірність сумісної появи Y_i була максимальною.

1.3. Рішення задачі

Для рішення даної задачі скористаємося формулою, відомою в теорії похибок вимірів, яка говорить, що нескінченно малий приріст площі $f(x)dx$, обмеженої кривою розподілу, яка носить назву елемента ймовірності, виражає ймовірність того, що деяка випадкова похибка лежить в межах між x і dx:

$$P(x \le X < x + dx) = f(x)dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx \tag{1.3}$$

Ймовірність появи похибки в кінцевому інтервалі $x_1 x_2$ виражається інтегралом

$$P(x) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-h^2 x^2} dx \tag{1.4}$$

Цей інтеграл носить назву інтеграла ймовірностей.

У формулі (1.3) замість істинної похибки X_i підставимо V_i – значення ймовірнішої похибки із (1.2).

Так як випадкові величини Y_i являються незалежними, то ймовірність того, що система випадкових величин $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ прийме сукупність значень, що лежать в межах $(Y_i, Y_i + \Delta Y_i)$, де i змінюється від 1 до n, буде рівна добутку ймовірностей (1.4):

$$P(Y_1, Y_2, ..., Y_n) = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2 \{Y_1 - \varphi(X_1)\}^2} e^{-h^2 \{Y_2 - \varphi(X_2)\}^2} ... e^{-h^2 \{Y_n - \varphi(X_n)\}^2} dY_1 dY_2 ... dY_n . \tag{1.5}$$

Цей вираз можна записати у вигляді

$$P(Y_1, Y_2, ..., Y_n) = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2 \left\{(Y_1 - \varphi(X_1))^2 + (Y_2 - \varphi(X_2))^2 + ... + (Y_n - \varphi(X_n))^2\right\}} ... dY_1 dY_2 ... dY_n . \tag{1.6}$$

Із цього виразу необхідно визначити значення $\varphi(X_i)$ при умові, щоб (1.6) перетворювалось в максимум.

Але максимум $P(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ відповідає мінімуму абсолютного значення показника степені виразу (1.6), тобто

$$\{Y_1 - \varphi(X_1)\}^2 + \{Y_2 - \varphi(X_2)\}^2 + ... + \{Y_n - \varphi(X_n)\}^2 = \min . \tag{1.7}$$

Таким чином, вимогу методу найменших квадратів при визначенні ймовірнішого значення функції $\varphi(x)$ експериментальних даних можна сформулювати слідуючим чином.

Для того, щоб дана сукупність результатів незалежних факторних ознак Y_i була ймовірнішою, необхідно визначити функцію $\varphi(X_i)$ так, щоб сума квадратів відхилень експериментальних значень Y_i від $\varphi(X_i)$ була мінімальною:

$$\sum_{i=1}^{n}\{Y_i-\varphi(X_i)\}^2=\min . \qquad (1.8)$$

В цьому заключається принцип методу найменших квадратів.

Лекція 2. Вибір формули за результатами експериментальних даних

2.1. Постановка задачі

Маючи два ряди експериментальних значень X_i, Y_i, зв'язаних функціональною залежністю, необхідно перш за все встановити загальний вигляд цієї залежності. Якщо це неможливо зробити по теоретичним міркуванням або на основі деяких раніше відомих умов, яким підкоряються визначені величини, то підбір формули проводиться на основі даних експериментальних залежностей.

Враховуючи специфіку фінансово-економічних досліджень, перш за все, необхідно визначити тісноту кореляційного зв'язку між факторними і результативними ознаками. Адже можливо між ними і не існує взаємозв'язку. Тоді, при відсутності кореляційного зв'язку неможливо їх представити у вигляді формул.

При наявності тісноти зв'язку розрахунком коефіцієнта кореляції, можна говорити про підбір формули, яка б встановила функціональну залежність між факторними і результативними ознаками.

2.2. Графічне представлення результатів

В першу чергу необхідно результати досліджень, представлених у числовому вигляді, нанести на прямолінійну координатну сітку, тобто побудувати точкову діаграму. Якщо похибки вихідних даних невеликі, то нанесені на координатну сітку точки, з'єднані ломаною або плавною лінією, зразу дадуть уяву про характер залежностей між визначеними величинами.

Якщо точність вихідних даних невелика, то точки будуть розташовуватися по різні сторони від графіка залежності, що зв'язує визначені величини, утворюючи зону розсіювання, витягнуту за напрямком кривої залежності.

Властивість випадкових величин коливатись навколо їх ймовірнішого положення дає можливість і в цьому випадку судити про характер залежності між результатами експериментальних даних.

В даному випадку зону розсіювання необхідно обмежити двома плавними або прямими лініями. Лінія, проведена посередині зони розсіювання, і буде шуканою.

Після того, як приблизна форма кривої встановлена, залишається вияснити, графіку якої функціональної залежності в загальному вигляді вона задовольняє. Для цього необхідно мати графіки функцій, які найбільш часто зустрічаються в практиці фінансово-економічної діяльності..

2.3. Вибір графіка математичної моделі

У фінансово-економічній діяльності зустрічаються багато видів математичних залежностей. Основними, найбільш поширеними являються:

1. $y = ax + b$, (2.1)

2. $y = ax^2 + bx + c$, (2.2)

3. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, (2.3)

4. $y = \dfrac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2}$, (2.4)

5. $y = ax^k$, (2.5)

6. $y = a^x = e^{bx}$, (2.6)

7. $y = \log_a x$, (2.7)

8. $y = ae^{bx+cx^2}$, (2.8)

2.4. Лінійна функція

Графіком лінійної функції $y = ax + b$ є пряма лінія.

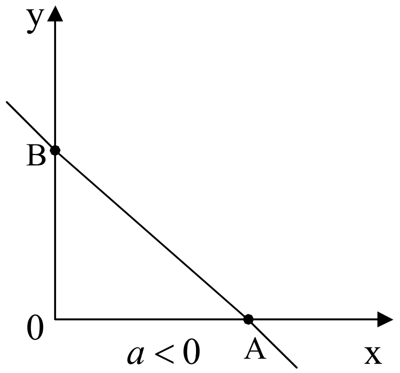


рис. 2.1. Графік функції $y = -ax + b$

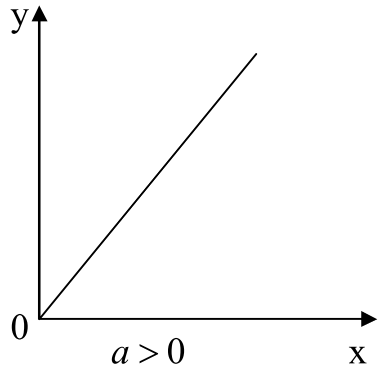


рис. 2.2. Графік функції $y = ax$

Коефіцієнт a називається кутовим коефіцієнтом прямої $y = ax + b$. При $a < 0$ функція монотонно спадає, а при $a > 0$ монотонно зростає.

Перетин з осями $A\left(-\frac{b}{a};\, 0\right)$; $B(0;\, b)$.

При $b = 0$ отримуємо *пряму пропорційність* $y = ax$. Графік функції – пряма лінія, яка проходить через початок координат.

2.5. Квадратний тричлен

Квадратний тричлен $y = ax^2 + bx + c$ (один із видів поліноміальної функції).

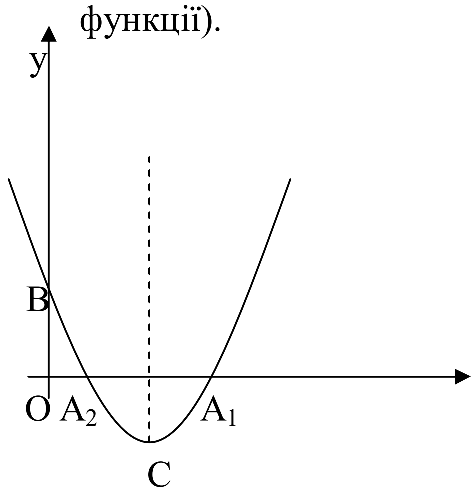


рис. 2.3. Парабола $a > 0$

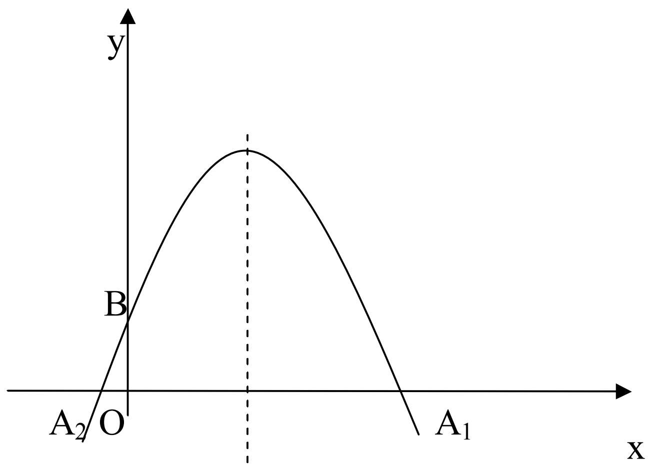


рис. 2.4. Парабола $a < 0$

Графік функції $y = ax^2 + bx + c$ – це парабола з вертикальною віссю симетрії $x = -\frac{b}{2a}$. При $a > 0$ функція спочатку спадає, досягає мінімуму, потім зростає. При $a<0$ функція спочатку зростає, досягає максимуму, а потім спадає.

Перетин з віссю OX: $A_1, A_2\left(\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ 0\right)$, з віссю OY: $B(0, C)$.

Екстремум $C\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

2.6. Многочлен третьої степені

Многочлен третьої степені $y=ax^3+bx^2+cx+d$ (рис. 2.5, 2.6, 2.7).

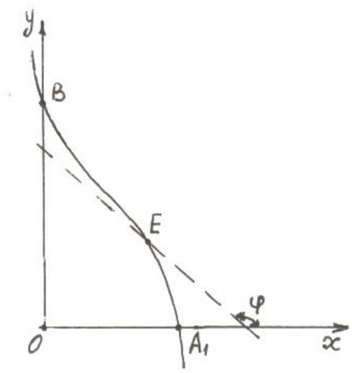


рис. 2.5. Кубічний поліном $\Delta>0;\ a<0$

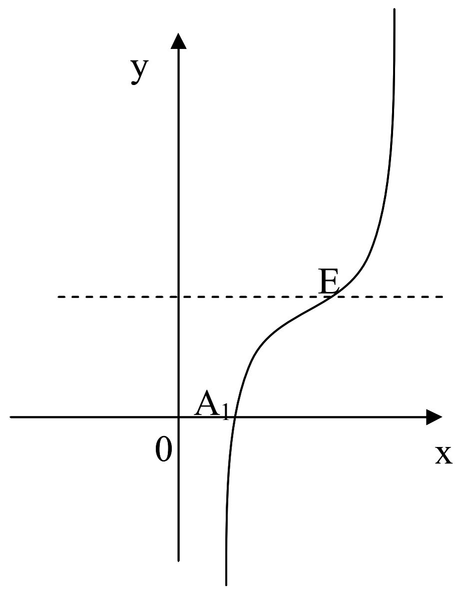


рис. 2.6 Кубічний поліном $\Delta=0;\ a>0$

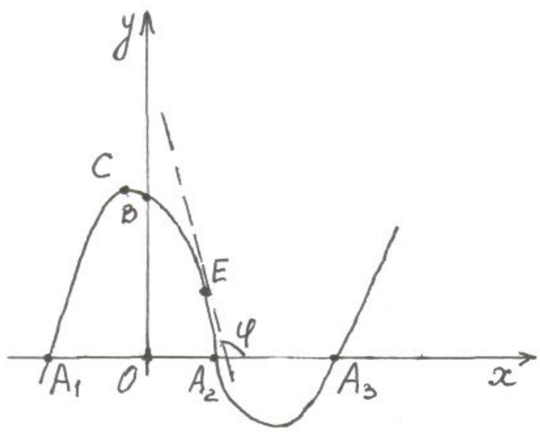


рис. 2.7. Кубічний поліном $\Delta<0;\ a>0$

Поведінка функції залежить від знаків a і $\Delta=3ac-b^2$ (2.9).

Якщо $\Delta \geq 0$ (рис. 2.5; 2.6), то функція монотонно зростає при $a > 0$ і монотонно спадає при $a < 0$.

Якщо $\Delta < 0$, то функція має один максимум і один мінімум (рис. 2.7). При $a > 0$ вона спочатку зростає від –∞ до максимуму, а після спадає до мінімуму і знову зростає до +∞. При $a < 0$ вона спадає від +∞ до мінімуму, зростає до максимуму і знову спадає до –∞.

Перетини з віссю OX визначаються дійсними коренями рівняння $y = 0$; їх може бути один, два (в даному випадку в одній із точок проходить дотик) або три A_1, A_2 і A_3.

Перетин з віссю OY: $B(0;\, d)$.

Екстремуми $C, D\left(-\dfrac{b \pm \sqrt{-\Delta}}{3a},\, d + \dfrac{2b^3 - 9abc \mp \left(6ac - 2b^2\right)\sqrt{-\Delta}}{27a^2}\right)$.

Точка перегину, яка є центром симетрії кривої:

$$E\left(-\frac{b}{3a},\, \frac{2b^3 - 9abc}{27a^2} + d\right);$$

дотична в цій точці має кутовий коефіцієнт:

$$\operatorname{tg}\varphi = \left(\frac{dy}{dx}\right)_E = \frac{\Delta}{3a}. \qquad (2.10)$$

2.7. Дробово-лінійна функція

Дробово-лінійна функція $y = \dfrac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2}$ (див. рис. 2.8).

Графіком дробово-лінійної функції є рівностороння гіпербола з асимптотами, паралельними осям координат.

Центр $C\left(-\dfrac{b_2}{a_2},\, \dfrac{a_1}{a_2}\right)$.

Параметр, яким відповідає a у рівнянні оберненої пропорційності:

$$a = -\frac{D}{a_2^2}, \qquad (2.11)$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad (2.12)$$

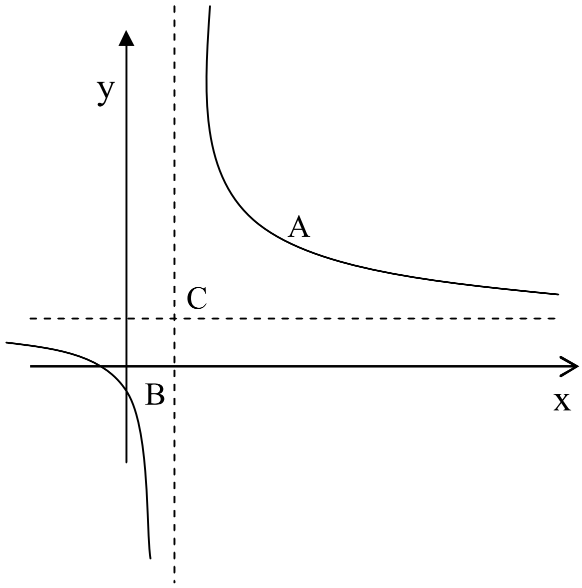


рис. 2.8. Дробово-лінійна функція

Вершини параболи: $A,B\left(-\frac{b_2 \pm \sqrt{D}}{a_2}, \frac{a_1 \pm \sqrt{D}}{a_2}\right)$. При цьому знаки беруться однакові при $D < 0$ і різні при $D > 0$.

Розрив функції проходить при $x = -\frac{b_2}{a_2}$. (2.13)

Якщо $D < 0$, то функція спадає від $\frac{a_1}{a_2}$ до $-\infty$ і від $+\infty$ до $\frac{a_1}{a_2}$. Якщо $D > 0$, то функція зростає від $\frac{a_1}{a_2}$ до $+\infty$ і від $-\infty$ до $\frac{a_1}{a_2}$. Екстремумів немає.

2.7. Степенева функція

Степенева функція $y = ax^k = ax^{\pm\frac{m}{n}}$ (m і n – цілі додатні взаємно прості числа).

Розглянемо випадок $a = 1$ (при $a \neq 1$). Крива у порівнянні з $y = x^k$ буде витягнута в напрямку осі Y в $|a|$ раз і якщо a від’ємне, – дзеркальне відображення відносно осі X.

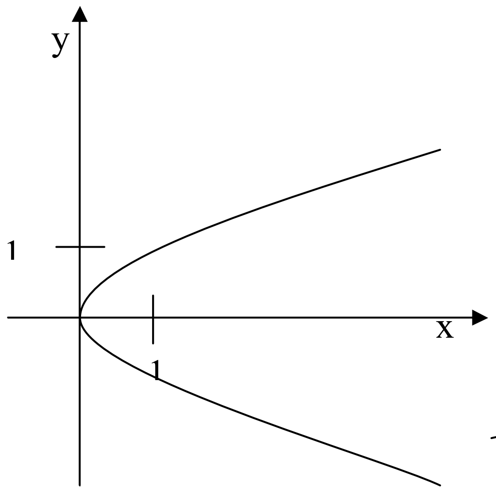


рис. 2.9. Графік функції $y = x^{\frac{1}{2}}$

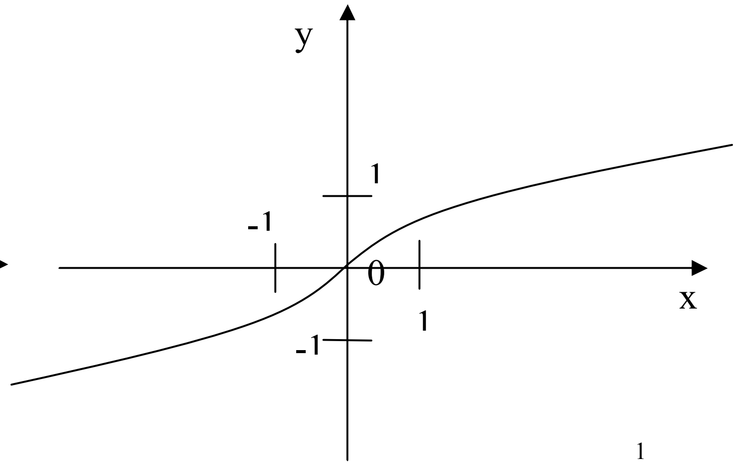


рис. 2.10. Графік функції $y = x^{\frac{1}{3}}$

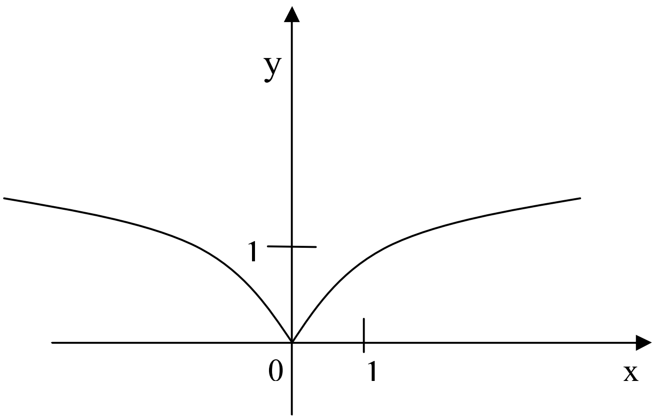


рис. 2.11. Графік функції $y = x^{\frac{2}{3}}$

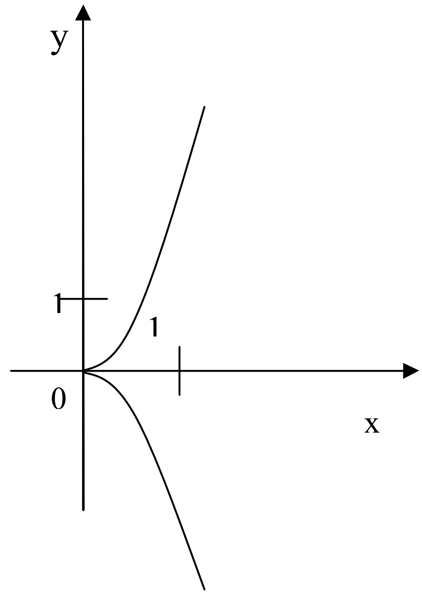


рис. 2.12. Графік функції $y = x^{\frac{3}{2}}$

а) $k > 0$, $y = x^{\frac{m}{n}}$. Графік (рис. 2.9; 2.10; 2.11; 2.12) проходить через точки $(0,0)$ і $(1,1)$. При $k > 1$ дотикається на початку на початку осі Y (рис. 2.9; 2.10; 2.11). При *n* парному крива симетрична відносно осі X (функція двозначна, рис. 2.9; 2.12), при *m* парному крива симетрична відносно осі Y (рис. 2.11), при *m* і *n* непарних функція симетрична відносно початку (рис. 2.10). У зв'язку з цим крива може мати в початку координат вершину, точку перегину, або повернення (див. рис. 2.9; 2.10; 2.11; 2.12). Асимптот немає.

б) $k < 0$, $y = x^{\frac{m}{n}}$. Графік (рис. 2.13; 2.14; 2.15) – крива гіперболічного типу з асимптотами – осями координат.

Розрив при $x = 0$. Крива наближається асимптотично до осі X тим швидше, а до осі Y тим повільніше, чим більше $|k|$.

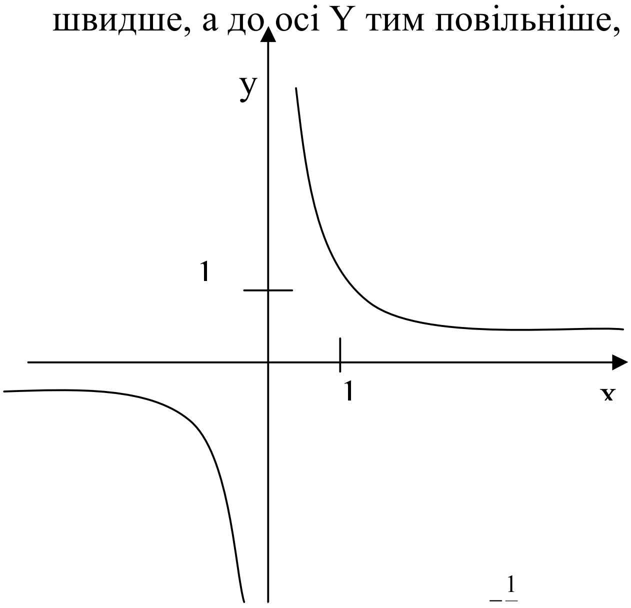


рис. 2.13. Графік функції $y = x^{-\frac{1}{3}}$

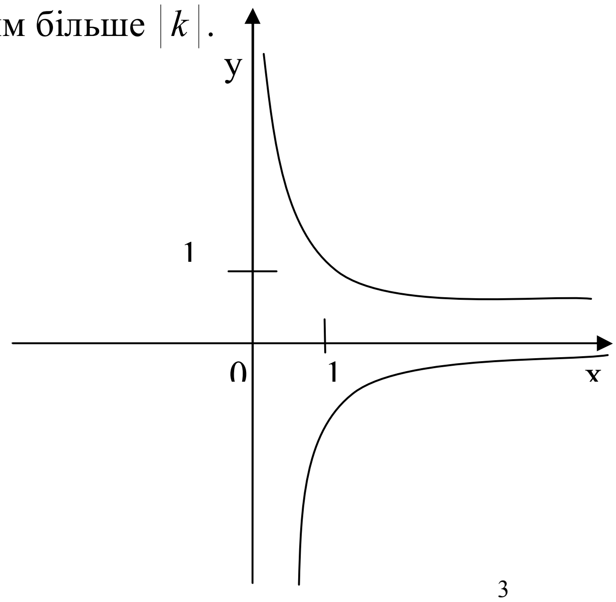


рис. 2.14. Графік функції $y = x^{-\frac{3}{2}}$

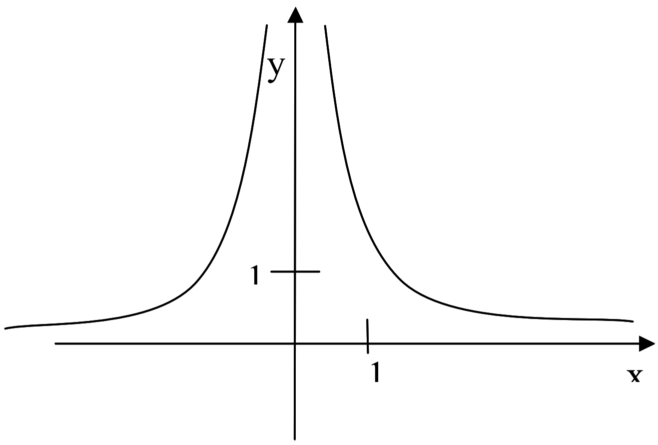


рис. 2.15. Графік функції $y = x^{-\frac{2}{3}}$

Симетрія відносно осей або початку залежить від парності або непарності *m* і *n*. Так, як і у випадку $k > 0$ (див. вище), цим визначається поведінка функції (див. рис. 2.13; 2.14; 2.15). Екстремумів немає.

2.8. Показникова функція

Показникова функція $y = a^x = e^{bx}$, ($a > 0$).

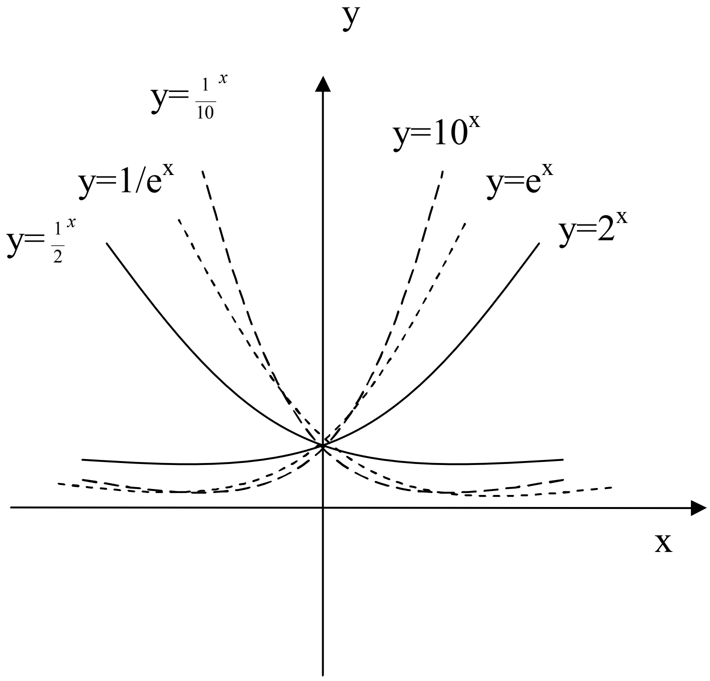


рис. 2.16. Графік показникової функції

Графік функції – показникова крива (при $a = e$ – натуральна показникова крива $y = e^x$). Функція приймає тільки додатні значення.

При $a > 1$ (тобто $b > 0$) монотонно зростає від 0 до ∞; при $a < 1$ (тобто $b < 0$) монотонно спадає від ∞ до 0 – тим швидше, чим більше $|b|$. Крива проходить через точку $(0,1)$ і наближається асимптотично до осі X (при $b > 0$ зліва, при $b < 0$ справа) тим швидше, чим більше $|b|$. Функція $y = a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ зростає при $a < 1$ і спадає при $a > 1$.

2.9. Логарифмічна функція

Логарифмічна функція $y = \log_a x$, $(a > 0)$.

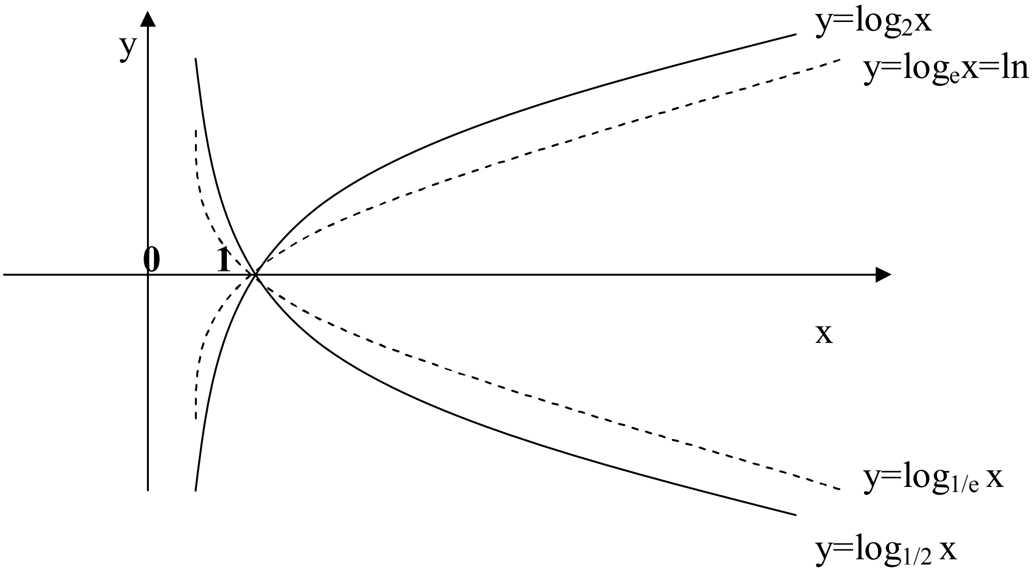


рис. 2.17. Графік логарифмічної функції

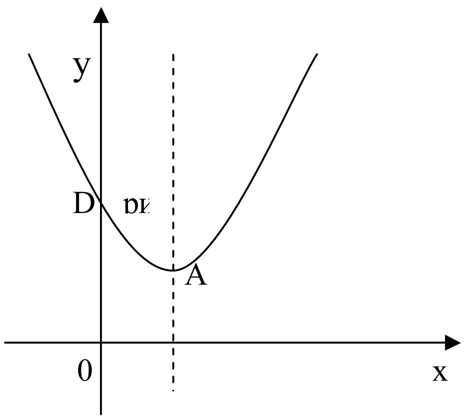
Графік функції – логарифміка (дзеркальне відображення показникової кривої відносно бісектриси $y = x$); при $a = e$ – натуральна логарифміка:

$$y = \ln x. \tag{2.14}$$

Функція існує тільки при $x > 0$. При $a > 0$ монотонно зростає від –∞ до +∞, при $a < 0$ монотонно спадає від +∞ до –∞ тим повільніше, чим більше $|\ln a|$. Крива проходить через точку $(1,0)$ і наближається асимптотично до осі Y (при $a > 0$ знизу, при $a < 0$ зверху) тим швидше, чим більше $|\ln a|$.

2.10. Експоненціальна функція

Експоненціальна функція $y = ae^{bx+cx^2}$



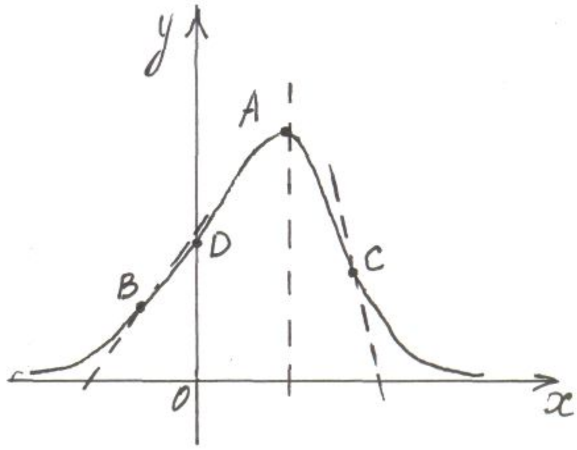


рис. 2.18. Графік функції $y=ae^{bx+cx^2}$ при $c>0$ рис. 2.19. Графік функції $y=ae^{bx+cx^2}$ при $c<0$.

Крива симетрична відносно вертикальної прямої

$$x = -\frac{b}{2c}, \tag{2.15}$$

осі X не перетинає. Вісь Y перетинає в точці $D(0,\, a)$. Поведінка функції залежить від знаків *a* і *c*.

Розглянемо випадок $a > 0$, при $a < 0$ слід відобразити криву симетрично відносно осі X.

а) $c > 0$. Функція спадає від +∞ до мінімума і зростає до +∞, залишаючись завжди додатною. Мінімум: $A\left(-\frac{b}{2c},\, ae^{-\frac{b^2}{4c}}\right)$. Точок перегину і асимптот немає (рис. 2.18).

б) $c < 0$. Функція зростає від 0 до максимума і спадає до нуля. Асимптота – вісь X. Максимум: $A\left(-\frac{b}{2c},\, ae^{-\frac{b^2}{4c}}\right)$.

Точки перегину: $B, C\left(\frac{-b \pm \sqrt{-2c}}{2c},\, ae^{\frac{-(b^2+2c)}{4c}}\right)$ (див. рис. 2.19).

Лекція 3. Визначення параметрів емпіричних формул

3.1. Постановка задачі

Найбільш точним методом визначення параметрів є метод найменших квадратів. Але в деяких випадках можуть бути використані і більш прості методи, такі як метод середніх та інші. Якщо отримана по цьому методу формула буде недостатньо точною, для подальшого її уточнення вже може бути використаний метод найменших квадратів.

3.2. Метод середніх

При цьому методі знання наближених значень параметрів дасть можливість зробити обчислення менш громіздкими. По методу середніх спочатку визначається лінійна залежність між “вирівняними” змінними *X* і *Y*

$$y = ax + b. \tag{3.1}$$

Для цього умовні рівняння $Y_i = aX_i + b$ для наявних пар значень X_i і Y_i діляться на дві рівні (або майже рівні) групи в порядку зростання змінної X_i або Y_i. Додаючи рівняння кожної групи, отримують два рівняння, із яких і визначаються *a* і *b*. Виражаючи *X* і *Y* через початкові змінні, отримують шукану залежність між *X* і *Y*. Якщо при цьому ще не всі параметри будуть визначені, то потрібно застосувати знову той же метод, вирівнюючи вже другі величини $\overline{X}$ і $\overline{Y}$.

При встановленні прямолінійної залежності на графік, де нанесені результати визначень, наноситься точка з координатами

$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}, \tag{3.2}$$

$$y_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}, \tag{3.3}$$

які представляють собою середні арифметичні із відповідних результатів експериментальних визначень.

Ця точка буде обов'язково лежати на прямій, визначеній за способом найменших квадратів. Через точку (x_0, y_0) проводиться пряма лінія так, щоб вона розмістилася по можливості ближче до всіх точок на графіку. Після цього перевіряють величину максимальних відхилень положень точок від нанесеної прямої. Якщо ці відхилення не виходять за межі точності вимірів, то для цього випадку приймається рівняння прямої лінії $y = ax + b$ або $y = ax$.

Після підбору рівняння кривої в загальному вигляді обчислюють її коефіцієнти за способом найменших квадратів і виконують перевірку формули по різницям між експериментальними і обчисленими значеннями функції.

Якщо отримані таким чином різниці не виходять за межі точності визначень експериментальних даних, то вибрану формулу можна використовувати в подальшій практичній роботі фінансиста і економіста.В протилежному випадку повинна бути підібрана інша формула.

3.3. Перевірка формули

Можна виконати перевірку формули і без попереднього обчислення її коефіцієнтів по способу найменших квадратів.

Формулу, що перевіряють, перетворюють так, щоб отримати лінійну залежність між будь-якими відомими функціями від x і y.

Найбільш зручним є вираження x і y через їх логарифми, наприклад:

$$y = ax^2. \tag{3.4}$$

Логарифмуючи цей вираз, отримуємо лінійне рівняння

$$\lg y = \lg a + 2\lg x \tag{3.5}$$

з поточними координатами $\lg y = Y$, $2\lg x = X$, перевірка якого труднощів не представляє.

Таким чином, якщо між $\lg y$ і $2\lg x$ існує прямолінійна залежність, то рівняння

$$y = a\sqrt[m]{x}, \qquad (3.6)$$

$$y = a\sqrt{x} \qquad (3.7)$$

підходять для вираження залежності між експериментальними значеннями x і y.

По аналогії, за допомогою логарифмування, можна перевірити велике число формул, в тому числі

$$y = ax^m, \qquad (3.8)$$

$$y = \frac{a}{x}, \qquad (3.9)$$

$$y = a\sqrt[m]{x}, \qquad (3.10)$$

$$y = ae^{-bx}. \qquad (3.11)$$

В перших трьох рівняннях після логарифмування отримуємо вираз логарифма функції через логарифм аргумента

$$\lg y = \lg a + m\lg x, \qquad (3.12)$$

$$\lg y = \lg a - \lg x, \qquad (3.13)$$

$$\lg y = \lg a + \frac{1}{m}\lg x. \qquad (3.14)$$

Для перевірки придатності цих рівнянь немає необхідності обчислювати значення логарифмів x і y. На практиці результати експериментальних визначень наносять безпосередньо на логарифмічну координатну сітку, на осях якої нанесені шкали не натуральних чисел, а їх логарифми. Після з'єднання отриманих таким чином точок судять про те, чи розміщуються вони на прямій, чи ні. Якщо ця умова виконана, то перевіряєме рівняння придатне для виразу функціональної залежності між результатами експериментальних даних.

Після логарифмування рівняння

$$y = ae^{-bx}, \qquad (3.15)$$

маємо

$$\lg y = \lg a - b\lg ex. \qquad (3.16).$$

Отримано рівняння прямої з поточними координатами $\lg y$ і x. Для перевірки придатності вибраного рівняння $\lg y_i$ і x_i наносяться на напівлогарифмічну координатну сітку, на осі абсцис якої нанесена шкала натуральних чисел, а на осі ординат – логарифмічна шкала.

Якщо нанесені по цим координатам точки розміщуються по прямій з допустимими відхиленнями, то рівняння (3.15) придатне для вираження залежності між результатами експериментальних даних.

3.4. Перетворення рівнянь з метою їх перевірки

Якщо логарифмування не приводить до потрібних результатів, то питання можна вирішити за допомогою такого перетворення рівняння, щоб отримати залежності між $\frac{1}{x}$ і x; $\frac{1}{x}$ і y; y і xy; $\frac{x}{y}$ і x; Δx і x та т. ін.

Користуючись одним із таких перетворень, можна рівняння

$$y = ax^2 + bx \tag{3.17}$$

представити у вигляді

$$\frac{y}{x} = ax + b \tag{3.18}$$

і перевірити, чи виконується прямолінійна залежність між $\frac{y}{x}$ і x.

Рівняння

$$y = a\sqrt{x} \tag{3.19}$$

можна представити у вигляді

$$y^2 = a^2 x\,. \tag{3.20}$$

В даному випадку повинна існувати прямолінійна залежність між y^2 і x.

Рівняння

$$y = \frac{ax + b}{x} \tag{3.21}$$

можна представити у вигляді

$$y = b\frac{1}{x} + a \qquad (3.22)$$

і розглядати залежність між y і $\frac{1}{x}$.

Рівняння

$$y = \frac{a}{x^2} \qquad (3.23)$$

можна представити у вигляді

$$y = b\frac{1}{x} + a \qquad (3.24)$$

і розглядати залежність між y і $\frac{1}{x}$.

Рівняння

$$y = \frac{a}{x^2} \qquad (3.25)$$

можна привести до прямолінійної залежності, прийнявши

$$\frac{1}{x^2} = X. \qquad (3.26)$$

Тоді

$$y = aX. \qquad (3.27)$$

Рівняння

$$y = \sqrt{ax + b} \qquad (3.28)$$

після звільнення правої частини від радикала буде

$$y^2 = ax + b. \qquad (3.29)$$

При цьому, таким чином, прямолінійна залежність повинна мати місце між x і y^2.

3.5. Перетворення квадратного полінома

Щоб перетворити до прямолінійної залежності рівняння

$$y = ax^2 + bx + c, \qquad (3.30)$$

необхідно нанести на графік результати експериментальних даних і провести плавну криву, яка розміщується якомога ближче до всіх експериментальних точок.

Після, на кривій слід намітити будь-яку точку, зняти її координати і підставити у (3.30). Віднімання отриманого рівняння із (3.30) дає

$$y - y_k = a\left(x^2 - x_k^2\right) + b\left(x - x_k\right). \qquad (3.31)$$

Після ділення на $\left(x - x_k\right)$ отримаємо рівняння прямої лінії

$$\frac{y - y_k}{x - x_k} = ax + \left(b + ax_k\right) \qquad (3.32)$$

з поточними координатами $\dfrac{y - y_k}{x - x_k}$ і x.

Нанесення цих координат на графік дозволяє вирішити питання придатності рівняння (3.30) для вираження залежності між результатами експериментальних даних.

При розгляді графіків слід завжди мати на увазі, що при використанні емпіричних формул береться лише частина кривої, яка відповідає деякому інтервалу зміни незалежної змінної. Тому, наприклад, не слід думати, що формула (3.30) зручна лише при наявності в заданої кривої максимума або мінімума.

Лекція 4. Визначення параметрів функціональної залежності загального виду по способу найменших квадратів (складання рівнянь поправок і нормальних рівнянь)

4.1. Складання рівнянь поправок

Нехай маємо два ряди результатів психолого-педагогічного експерименту X і Y

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$$

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$$

зв’язаних функціональною залежністю

$$Y = f(X). \tag{4.1}$$

Функція (4.1) дана в загальному вигляді. Значення постійних параметрів $a_0, a_1, a_2, ..., a_k$ невідомі; їх числові величини, що відповідають ймовірнішим значенням функції, тобто найбільш підходящі до істинного їх значення, необхідно вибрати, виходячи із принципів способу найменших квадратів.

Результати експериментальних даних, як функції *Y*, так і аргумента *X*, являються помилковими за рахунок впливу випадкових похибок.

Але для спрощення ми приймемо результати експериментальних даних аргумента $x_1, x_2, ..., x_n$ безпомилковими, віднісши всі похибки аргумента на рахунок помилковості функції.

Позначивши безпомилкові значення визначених величин через X_i, Y_i, а результати експериментальних визначень через x_i, y_i і істинні похибки вимірів через Δx_i, Δy_i, можемо написати

$$X_i = x_i + \Delta x_i, \tag{4.2}$$

$$Y_i = y_i + \Delta y_i. \tag{4.3}$$

Підставивши (4.2), (4.3) у (4.1), будемо мати

$$y_i + \Delta y_i = f(x_i + \Delta x_i) = f(x_i) + \lambda(x_i, \Delta x_i). \tag{4.4}$$

Звідси

$$y_i + \Delta y_i - \lambda(x_i, \Delta x_i) = f(x_i). \tag{4.5}$$

Задача зводиться, таким чином, до знаходження ймовірніших значень функції, відповідних визначеним значенням аргумента, які приймаються за істинні її значення.

При такій постановці задачі відхилення визначаємих значень функції від їх ймовірніших значень виражаються слідуючим чином

$$\begin{aligned} y_1 - \varphi(x_1) &= V_1, \\ y_2 - \varphi(x_2) &= V_2, \\ \dots\ \dots\ &\dots\ \dots\ \dots \\ y_n - \varphi(x_n) &= V_n. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Отримаємо систему n рівняння з $k+1$ невідомими параметрами $a_0, a_1, ..., a_k$, де $k+1<n$.

Система (4.6) носить назву початкових рівнянь (рівнянь поправок).

4.2. Перехід від рівнянь поправок до нормальних рівнянь

Рішити цю систему алгебраїчним шляхом неможливо, тому що групуючи із (4.6) різні рівняння по $k+1$ в групі і розв’язуючи їх, ми будемо отримувати всякий раз різні значення кожного із параметрів $a_0, a_1, a_2, ..., a_k$.

Для того, щоб виконати вимогу способу найменших квадратів, підведемо рівність (4.6) до квадрату. Будемо мати

$$\begin{aligned}&\left(y_1-\varphi(x_1)\right)^2=V_1^2,\\&\left(y_2-\varphi(x_2)\right)^2=V_2^{\,2},\\&\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\&\left(y_n-\varphi(x_n)\right)^2=V_n^{\,2}.\end{aligned}\tag{4.7}$$

Щоб із умови мінімуму суми квадратів відхилень V_i отримати шукані значення параметрів, необхідно прирівняти нулю суми часткових похідних (4.7) по параметрам $a_0, a_1, a_2, ..., a_k$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial V_1}{\partial a_0}\right)^2+\left(\frac{\partial V_2}{\partial a_0}\right)^2+...+\left(\frac{\partial V_n}{\partial a_0}\right)^2=0,\\&\left(\frac{\partial V_1}{\partial a_1}\right)^2+\left(\frac{\partial V_2}{\partial a_1}\right)^2+...+\left(\frac{\partial V_n}{\partial a_1}\right)^2=0,\\&\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\&\left(\frac{\partial V_1}{\partial a_k}\right)^2+\left(\frac{\partial V_2}{\partial a_k}\right)^2+...+\left(\frac{\partial V_n}{\partial a_k}\right)^2=0.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Отримана система рівнянь носить назву системи нормальних рівнянь. В цій системі число всіх рівнянь дорівнює числу невідомих параметрів $k+1$. Рівняння системи рівнянь (4.8) дасть можливість визначити ймовірніші значення параметрів. Підстановка числових значень, ймовірніших значень параметрів у (4.8) приводить до рішення поставленої задачі в першій її частині.

Друга частина задачі, як вже було сказано, заключається в аналізі отриманих ймовірніших значень функції.

Для ілюстрації сказаного, припустимо, що функціональна залежність $f(X)$ являється поліномом степені m :

$$f(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_m X^m = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k . \qquad (4.9)$$

Підставляючи в це рівняння послідовно всі значення визначених величин, будемо мати систему початкових рівнянь (рівнянь поправок)

$$\begin{aligned} &a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_m x_1^m - y_1 = V_1 , \\ &a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_m x_2^m - y_2 = V_2 , \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ &a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_m x_n^m - y_n = V_n . \end{aligned} \qquad (4.10)$$

Для визначення параметрів $a_0, a_1, \ldots, a_m$ маємо умову

$$V_1^2 + V_2^2 + \ldots + V_n^2 = \min , \qquad (4.11)$$

або в розгорнутому вигляді

$$\begin{aligned} &(a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_m x_1^m - y_1)^2 + (a_0 + a_1 x_2 + \ldots + a_m x_2^m - y_2)^2 + \ldots + \\ &+ (a_0 + a_1 x_n + \ldots + a_m x_n^m - y_n)^2 = \min. \end{aligned} \qquad (4.12)$$

Після взяття частинних похідних вираз (4.12) по змінним $a_0, a_1, \ldots, a_m$, прирівнювання їх до нуля і скорочення на 2 отримаємо систему $m+1$ нормальних рівнянь

$$\begin{aligned} &na_0 + a_1(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + a_2(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + \ldots + a_m(x_1^m + x_2^m + \ldots + x_n^m) - (y_1 + y_2 + \ldots + y_n) = 0, \\ &a_0(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + a_1(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + \ldots + a_m(x_1^{m+1} + x_2^{m+1} + \ldots + x_n^{m+1}) - (y_1 x_1 + y_2 x_2 + \ldots + y_n x_n) = 0, \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ &a_0(x_1^m + x_2^m + \ldots + x_n^m) + a_1(x_1^{m+1} + x_2^{m+1} + \ldots + x_n^{m+1}) + \ldots + a_m(x_1^{2m} + x_2^{2m} + \ldots + x_n^{2m}) - (y_1 x_1^m + y_2 x_2^m + \ldots + y_n x_n^m) = 0. \end{aligned}$$

(4.13)

Ввівши скорочений запис сум по Гаусу, будемо мати:

$$
\begin{aligned}
&na_0+a_1[x]+a_2\left[x^2\right]+\ldots+a_m\left[x^m\right]-[y]=0,\\
&a_0[x]+a_1\left[x^2\right]+a_2\left[x^3\right]+\ldots+a_m\left[x^{m+1}\right]-[xy]=0,\\
&a_0\left[x^2\right]+a_1\left[x^3\right]+a_2\left[x^4\right]+\ldots+a_m\left[x^{m+2}\right]-\left[x^2y\right]=0,\\
&\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\
&a_0\left[x^m\right]+a_1\left[x^{m+1}\right]+a_2\left[x^{m+2}\right]+\ldots+a_m\left[x^{2m}\right]-\left[x^my\right]=0.
\end{aligned}
\qquad (4.14)
$$

4.3. Шляхи рішення нормальних рівнянь

Визначення коефіцієнтів a_i із цих рівнянь можна виконати одним із відомих в математиці способів. Якщо невідомих не більше чотирьох, то простіше для цього користуватися визначниками, тому що при цьому у випадку визначаємого рівняння, яке представляє собою поліном додатньої цілої степені, отримуються попутно всі величини, які характеризують точність кінцевих результатів.

Вид функціональної залежності (4.1) для різних випадків буде різним, але хід рішення задачі у всіх випадках остається загальним. Спочатку в підібране рівняння підставляють послідовно відповідні пари визначених значень x_i та y_i і отримують n рівнянь поправок виду (4.7). Після підводять до квадрату ліві частини цих рівнянь і, склавши їх між собою, знаходять частинні похідні отриманого виразу (4.12) по змінним a_i. Прирівнюючи їх нулю, отримують $m+1$ нормальних рівнянь виду (4.14). Накінець, рішають нормальні рівняння і отримують ймовірніші значення шуканих коефіцієнтів a_i.

Знаходження сум $[x], [x^2], [x^3], \ldots, [y], [xy], [x^2y], \ldots$ виконується у спеціальній обчислювальній таблиці. Обчислення повинні вестись акуратно в певній послідовності і по певним схемам.

4.4. Обробка матеріалів нерівноточних визначень

Обробка нерівноточних результатів експериментальних визначень відрізняється значною складністю в порівнянні з рівноточними вихідними даними.

Розглянемо випадок нерівноточних результатів експерименту.

В даному випадку визначення невідомих параметрів $a_0, a_1, ..., a_m$ виконується при умові

$$[PVV] = \min, \tag{4.15}$$

або в розгорнутому вигляді

$$P_1(y_1 - f(x_1))^2 + P_2(y_2 - f(x_2))^2 + ... + P_m(y_m - f(x_m))^2 = \min, \tag{4.16}$$

де $P_1, P_2, ..., P_m$ – ваги окремих результатів експериментальних визначень.

Система нормальних рівнянь для випадку номінала степені *n* буде

$$\begin{aligned}
&a_0[P] + a_1[Px] + ... + a_n[Px^n] - [Py] = 0, \\
&a_0[Px] + a_1[Px^2] + ... + a_n[Px^{n+1}] - [Pxy] = 0, \\
&a_0[Px^2] + a_1[Px^3] + ... + a_n[Px^{n+2}] - [Px^2y] = 0, \\
&... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\
&a_0[Px^n] + a_1[Px^{n+1}] + ... + a_n[Px^{2n}] - [Px^ny] = 0.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Таким чином, для того, щоб при нерівноточних визначеннях отримати значення сум, які входять у вирази для визначення по способу найменших квадратів величин a_i, необхідно складові кожної із сум помножити на вагу цієї складової, а число визначень *n* замінити сумою ваг результатів визначень.

Лекція 5. Рішення нормальних рівнянь за допомогою визначників

5.1. Рішення нормальних рівнянь способом Крамера

Позначимо невідомі, шукані коефіцієнти a_i через x_i, а відомі величини, складені із результатів визначень – через a_{ij}. Тоді система лінійних рівнянь (4.14) може бути представлена у вигляді

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Для того, щоб із цієї системи визначити невідомі x_i, складемо із коефіцієнтів при невідомих визначник *D*, який називається визначником системи рівнянь (5.1)

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{5.2}$$

Помножимо ліву і праву частини рівності (5.2) на x_i. В лівій частині будемо мати $D \cdot X_i$, в правій же частині введемо у всі члени *i*-го стовпчика визначника a_{ki} множник x_i

$$Dx_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1i}x_i & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2i}x_i & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{ni}x_i & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{5.3}$$

Після до *i*-го стовпчика визначника (5.1) додамо всі інші стовпчики, помножені відповідно на $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Величина визначника від цього не зміниться. Тоді *i*-ий стовпчик представить собою ліву частину системи рівнянь (5.1).

Замінимо його вільними членами цієї системи і позначимо через D_i:

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{5.4}$$

Звідки

$$x_i = \frac{D_i}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}. \tag{5.5}$$

Формула (5.5) дає можливість визначити кожне невідоме системи лінійних рівнянь (5.1).

5.2. Представлення системи лінійних однорідних рівнянь

Якщо вільні члени системи лінійних рівнянь рівні нулю, то вона називається системою лінійних однорідних рівнянь.

В математиці доводиться, що система лінійних однорідних рівнянь може мати рішення, відмінне від нульового, якщо визначник системи *D* рівний нулю.

Система лінійних однорідних рівнянь з невідомими коефіцієнтами a_i утворюється в тому випадку, коли відомий загальний вигляд залежності

$$F(x,y) = a_0 f_0(x,y) + a_1 f_1(x,y) + \dots + a_n f_n(x,y), \tag{5.6}$$

і необхідно визначити цифрові значення коефіцієнтів a_i при умові, що крива (5.6) проходить через *n* точок з невідомими координатами x_i, y_i.

Тоді, підставивши координати даних точок у (5.6), отримують систему *n* лінійних однорідних рівнянь:

$$\begin{aligned} & a_0 f_0(x_0,y_0) + a_1 f_1(x_0,y_0) + \dots + a_n f_n(x_0,y_0) = 0, \\ & a_0 f_0(x_1,y_1) + a_1 f_1(x_1,y_1) + \dots + a_n f_n(x_1,y_1) = 0, \\ & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ & a_0 f_0(x_{n-1},y_{n-1}) + a_1 f_1(x_{n-1},y_{n-1}) + \dots + a_n f_n(x_{n-1},y_{n-1}) = 0. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Сумісно з (5.6) вона утворює систему $n+1$ однорідних лінійних рівнянь відносно коефіцієнтів a_i, яка має рішення, відмінне від нульового тільки при умові, що її визначник D дорівнює нулю:

$$D = \begin{vmatrix} f_0(x,y) & f_1(x,y) & \dots & f_n(x,y) \\ f_0(x_0,y_0) & f_1(x_0,y_0) & \dots & f_n(x_0,y_0) \\ f_0(x_1,y_1) & f_1(x_1,y_1) & \dots & f_n(x_1,y_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_0(x_{n-1},y_{n-1}) & f_1(x_{n-1},y_{n-1}) & \dots & f_n(x_{n-1},y_{n-1}) \end{vmatrix} = 0. \quad (5.8)$$

Так як рівність (5.8) виконується при всіх значеннях x та y, то вона являється рівнянням шуканої залежності.

Якщо рівність (5.8) являється поліномом степені n

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n, \quad (5.9)$$

то його можна виразити, аналогічно (5.8), через визначник

$$\begin{vmatrix} F(x) & 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ y_0 & 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = 0. \quad (5.10)$$

Розклад цього визначника по елементам першого рядка (стрічки) дає

$$F(x)\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} - x_0 \begin{vmatrix} y_0 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ y_1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} -$$

$$- x \begin{vmatrix} 1 & y_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & y_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & y_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} - \dots - x^n \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{n-1} & y_0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & y_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & y_n \end{vmatrix} = 0. \quad (5.11)$$

При цьому співмножником при $F(x)$ являється так званий визначник Вандермонда $n+1$ порядку. Визначники при x^k отримуються із визначника Вандермонда шляхом заміни $k+1$ стовпчика величинами $y_0, y_1, \dots, y_n$.

Позначивши визначник Вандермонда через D, а визначники при x^i – через D_i, будемо мати

$$F(x) = \frac{D_0}{D} + x\,\frac{D_1}{D} + x^2\,\frac{D_2}{D} + \ldots + x^n\,\frac{D_n}{D}\;. \qquad (5.12)$$

При виконанні зрівноваження за способом найменших квадратів ми маємо загальний вираз залежності, аналогічний (5.6), і систему нормальних рівнянь, аналогічну системі (5.7). Шукане рівняння отримаємо, прирівнявши визначник систем (5.6) і (5.7) нулю.

5.3. Представлення нормального рівняння для поліному n порядку

Розглянемо більш детально той випадок, коли шукане рівняння являється поліномом степені n (5.10).

Нормальне рівняння для цього випадку має вигляд

$$\begin{aligned}
&a_0 n + a_1[x] + a_2[x^2] + \ldots + a_n[x^n] - [y] = 0,\\
&a_0[x] + a_1[x^2] + a_2[x^3] + \ldots + a_n[x^{n+1}] - [xy] = 0,\\
&\ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\\
&a_0[x^n] + a_1[x^{n+1}] + a_2[x^{n+2}] + \ldots + a_n[x^{2n}] - [x^n y] = 0.
\end{aligned} \qquad (5.13)$$

Визначник системи (5.13) буде

$$D = \begin{vmatrix} n & [x] & [x^2] & \ldots & [x^n] \\ [x] & [x^2] & [x^3] & \ldots & [x^{n+1}] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ [x^n] & [x^{n+1}] & [x^{n+2}] & \ldots & [x^{2n}] \end{vmatrix}. \qquad (5.14)$$

Одночасне виключення невідомих коефіцієнтів із (5.12) і (5.9) приводить до формули шуканої залежності

$$F(x) = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ [y] & n & [x] & [x^2] & \dots & [x^n] \\ [xy] & [x] & [x^2] & [x^3] & \dots & [x^{n+1}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [x^n y] & [x^n] & [x^{n+1}] & [x^{n+2}] & \dots & [x^{2n}] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & [x] & [x^2] & \dots & [x^n] \\ [x] & [x^2] & [x^3] & \dots & [x^{n+1}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [x^n] & [x^{n+1}] & [x^{n+2}] & \dots & [x^{2n}] \end{vmatrix}}. \qquad (5.15)$$

Це і є кінцева формула для рішення задачі.

5.4. Знаходження визначника 4×4

Приведемо програму рішення визначника розміром 4×4 на програмованому мікрокалькуляторі CITIZEN SRP-350 SCIENTIFIC CALCULATOR.

1. Призначення змінних

$$\begin{vmatrix} A & E & I & M \\ B & F & J & N \\ C & G & K & O \\ D & H & L & P \end{vmatrix}$$

2. Програма №1 [KRAMER] розрахунку визначника розміром 4×4

№	Оператори
1.	INPUT A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P;
2.	Z = (GL – KH)(AN – MB) + (GP – OH)(BI – AJ) +
	+ (CL – KD)(MF – EN) + (CH – GD)(IN – MJ);
3.	Z = Z + (KP – OL)(AF – BE) + (CP – OD)(EJ – IF);
4.	PRINT "Z =", Z;
5.	END

5.5. Знаходження визначника 3×3

Програма №2 [KRAMER2] для розрахунку визначника розміром 3×3.

Призначення змінних

$$\begin{vmatrix} Q & T & W \\ R & U & X \\ S & V & Y \end{vmatrix}$$

Програма

№	Оператори
1.	INPUT Q, R, S, T, U, V, W, X, Y;
2.	A = Q(UY – XV) + T(XS – RY) + W(RV – US);
3.	PRINT "A =", A;
4.	END

5.6. Знаходження обернених ваг зрівноважених елементів

Значення $P = \frac{A}{Z}$ знаходять за алгоритмом:

MODE, MAIN, $\boxed{:}$, Z, ENTER.

При цьому спочатку знаходять визначник Z розміром 4×4, а після набирають алгебраїчні доповнення A_i розміром 3×3.

5.7. Розрахунок коефіцієнтів нормальних рівнянь

При апроксимації результатів експерименту поліномом третього порядку раціонально коефіцієнти нормальних рівнянь розраховувати за розробленою автором програмою.

Програма №3 [KOEFNORM] розрахунку коефіцієнтів нормальних рівнянь для поліному третього степені

Таблиця 5.1.

Представлення змінних

M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
$[x]$	$[y]$	$[x^0]$	$[x^2]$	$[x^3]$	$[x^4]$	$[x^5]$	$[x^6]$	$[xy]$	$[x^2y]$	$[x^3y]$

Програма

№	Оператори
1.	M = 0; N = 0; O = 0; P = 0; Q = 0; R = 0;

2.	S = 0; T = 0; U = 0; V = 0; W = 0;
3.	LABEL 1: ;
4.	INPUT X, Y;
5.	M = X + M; N = N + Y; O = O + 1;
6.	$P = P + X^2$; $Q = Q + X^3$; $R = R + X^2 * X^3$;
7.	$S = S + X^2 * X^2 * X$;
8.	$T = T + X^3 * X^3$;
9.	U = U + XY; $V = V + X^2Y$; $W = W + X^3Y$;
10.	GOTO 1;
11.	END

5.8. Рішення нормальних рівнянь на персональному комп'ютері

Програма №4

Раціонально рішати нормальні рівняння способом Крамера на персональному комп'ютері в редакторі Microsoft Office Excel. При цьому набирається визначник *D* в слідуючих чарунках

Таблиця 5.2.

Набір елементів визначника

	A	B	C	D	E	F
1						
2	$[x^6]$	$[x^5]$	$[x^4]$	$[x^3]$		$[x^3y]$
3	$[x^5]$	$[x^4]$	$[x^3]$	$[x^2]$		$[x^2y]$
4	$[x^4]$	$[x^3]$	$[x^2]$	$[x]$		$[xy]$
5	$[x^3]$	$[x^2]$	$[x]$	n		$[y]$
6						

В довільній клітинці записується формула розрахунку визначника

= МОПРЕД (A2 : D5) ENTER (5.16)

і отримують результат.

При цьому букви МОПРЕД набирають російською мовою, після чого натиском клавіш Ctrl + Shift переходять на англійську мову і букви в дужках набирають на англійській мові.

При наборі необхідно кому для виділення цілих чисел ставити з числового ряду, а не з буквеного ряду, що досить часто трапляється в практичній роботі. Крім цього, задавши крайній лівий чарунок A2, необхідно ставити двокрапку, а не тире, що також трапляється в наборі.

Задавши крайній лівий чарунок A2 і крайній правий D5, автоматично числовий масив обводиться синім контуром, що говорить про те, що комп’ютер готовий працювати із заданим масивом.

Знак рівності у формулі (5.16) орієнтує машину для роботи з числовим масивом.

Знайшовши визначник D, підставляють в стовпчик A значення із стовпчика F і знаходять визначник D_1. Підставивши у стовпчик B значення із стовпчика F і поновивши попередні значення в стовпчику A, отримують визначник D_2. Підставляючи значення стовпчика F у стовпчик C та D і поновлюючи початкові значення у попередніх стовпчиках, знаходять визначники D_3 і D_4.

Після цього отримують формулу поліному

$$y = \frac{D_1}{D}x^3 + \frac{D_2}{D}x^2 + \frac{D_3}{D}x + \frac{D_4}{D} \qquad (5.17)$$

або

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d\,, \qquad (5.18)$$

де $a = \frac{D_1}{D}; \quad b = \frac{D_2}{D}; \quad c = \frac{D_3}{D}; \quad d = \frac{D_4}{D}$. (5.19).

5.9. Заключний контроль зрівноваження

Заключний контроль виконують за формулами

$$\begin{aligned}
a[x^6] + b[x^5] + c[x^4] + d[x^3] &= [x^3 y] \\
a[x^5] + b[x^4] + c[x^3] + d[x^2] &= [x^2 y] \\
a[x^4] + b[x^3] + c[x^2] + d[x] &= [xy] \\
a[x^3] + b[x^2] + c[x] + d \cdot n &= [y]
\end{aligned} \qquad (5.20)$$

5.10. Приклад обробки експериментальних даних

Приклад. Знайти по способу найменших квадратів многочлен третьої степені, апроксимуючий (вирівнюючий) результати педагогічного експерименту x_i та y_i, поміщені в табл. 5.3.

Таблиця 5.3.

Обчислювальна таблиця

№	Результати експерименту		x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	xy	x^2y	x^3y
	x	y								
1	0	– 5	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1,0	0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0	0	0
3	2,1	+ 5	4,41	9,26	19,45	40,84	85,77	10,5	22,05	46,30
4	2,9	16	8,41	24,39	70,73	205,11	594,82	46,4	134,56	390,24
5	4,0	39	16,00	64,00	256,00	1024,00	4096,00	156,00	624,00	2496,00
6	5,0	80	25,00	125,00	625,00	3125,00	15625,00	400,00	2000,00	10000,00
n=6	15,0	135	54,32	223,65	972,18	4395,95	20402,59	612,9	2780,61	12932,54

Шуканий многочлен на основі (5.13) буде

$$F(x) = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & x & x^2 & x^3 \\ 135 & 6 & 15 & 54{,}82 & 223{,}65 \\ 612{,}9 & 15 & 54{,}82 & 223{,}65 & 972{,}18 \\ 2780{,}61 & 54{,}82 & 223{,}65 & 972{,}18 & 4395{,}95 \\ 12932{,}54 & 223{,}65 & 972{,}18 & 4395{,}95 & 20402{,}59 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 15 & 54{,}82 & 223{,}65 \\ 15 & 54{,}82 & 223{,}65 & 972{,}18 \\ 54{,}82 & 223{,}65 & 972{,}18 & 4395{,}95 \\ 223{,}65 & 972{,}18 & 4395{,}95 & 20402{,}59 \end{vmatrix}}.$$

Звідси, після розкладу чисельника по елементам першого рядка (стрічки) і обчислення визначника, отримаємо

$$F(x) = 0{,}9237x^3 - 2{,}485x^2 + 6{,}296x - 4{,}97.$$

Лекція 6. Рішення системи нормальних рівнянь по схемі Гауса

6.1. Постановка задачі

Спосіб рішення нормальних рівнянь, запропонований Гаусом, заключається в послідовному виключенні невідомих, починаючи з першого. Всі дії при цьому виконуються у строго визначеному порядку і вкладаються у спеціальну схему. Обчислення ведуться з проміжним контролем по окремим стадіям і заключним контролем, що сприяє найбільшій впорядкованості і продуктивності робіт.

Крім того, формули, які застосовуються в схемі Гауса, дозволяють отримати ряд виразів і залежностей для оцінки похибок експериментальних визначень: наприклад, зв'язок між істинними і ймовірнішими похибками, формулу середньої квадратичної похибки визначеної величини, вагу останнього невідомого і т. ін.

Виходячи з цього, зупинимося дещо детальніше на рішенні нормальних рівнянь способом Гауса, відмінним від приведеного в попередній лекції.

6.2. Представлення системи рівнянь поправок

Для визначеності положимо, що маємо ряд результатів психолого-педагогічного експерименту, виражених в числовій формі x_i та y_i, функціональна залежність між якими виражається за допомогою поліному степені *k*, де коефіцієнти a_i являються невідомими.

Тоді, система рівнянь поправок (початкових рівнянь) може бути записана у вигляді

$$
\begin{aligned}
&a_1x_1^k + a_2x_1^{k-1} + a_3x_1^{k-2} + \ldots + a_kx_1 + a_{k+1}x_1^0 - y_1 = V_1, \\
&a_1x_2^k + a_2x_2^{k-1} + a_3x_2^{k-2} + \ldots + a_kx_2 + a_{k+1}x_2^0 - y_2 = V_2, \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
&a_1x_k^k + a_2x_k^{k-1} + a_3x_k^{k-2} + \ldots + a_kx_k + a_{k+1}x_k^0 - y_k = V_k, \\
&a_1x_{k+1}^k + a_2x_{k+1}^{k-1} + a_3x_{k+1}^{k-2} + \ldots + a_kx_{k+1} + a_{k+1}x_{k+1}^0 - y_{k+1} = V_{k+1}, \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
&a_1x_n^k + a_2x_n^{k-1} + a_3x_n^{k-2} + \ldots + a_kx_n + a_{k+1}x_n^0 - y_n = V_n.
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

6.3. Представлення системи нормальних рівнянь

Помножимо кожний рядок цієї системи відповідно на $x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k$ і складемо їх між собою. Отримаємо

$$
\begin{aligned}
&a_1[x^kx^k] + a_2[x^{k-1}x^k] + a_3[x^{k-2}x^k] + \ldots + a_k[xx^k] + \\
&+ a_{k+1}[x^0x^k] - [yx^k] = [Vx^k]
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

Після помножимо кожний рядок системи (6.1) на $x_1^{k-1}, x_2^{k-1}, \ldots, x_n^{k-1}$.

Додаючи, отримаємо

$$
\begin{aligned}
&a_1[x^kx^{k-1}] + a_2[x^{k-1}x^{k-1}] + a_3[x^{k-2}x^{k-1}] + \ldots + a_k[xx^{k-1}] + \\
&+ a_{k+1}[x^0x^{k-1}] - [yx^{k-1}] = [Vx^{k-1}]
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

Продовжуючи і далі такі перетворення за допомогою послідовного множення рядків (6.1) відповідно на $x_i^{k-2}, x_i^{k-3}, \ldots, x_i^0$ та їх додавання, отримаємо ще $k-1$ аналогічних рівнянь.

Отримана таким чином система буде складатися із $k+1$ перетворених рівнянь з $k+1$ невідомими.

$$
\begin{aligned}
&a_1[x^kx^k] + a_2[x^{k-1}x^k] + \ldots + a_{k+1}[x^0x^k] - [yx^k] = [Vx^k], \\
&a_1[x^kx^{k-1}] + a_2[x^{k-1}x^{k-1}] + \ldots + a_{k+1}[x^0x^{k-1}] - [yx^{k-1}] = [Vx^{k-1}], \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
&a_1[x^kx^0] + a_2[x^{k-1}x^0] + \ldots + a_{k+1}[x^0x^0] - [yx^0] = [Vx^0].
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

Розглядаючи цю систему, бачимо, що якщо прирівняти нулю ліві частини рівнянь, які її складають, то вона буде повністю співпадати із системою нормальних рівнянь (4.14), відрізняючись від неї тільки послідовністю рядків і членів в рядках.

Доведемо, що дійсно

$$[Vx^k] = [Vx^{k-1}] = ... = [Vx^0] = 0\,. \qquad (6.5)$$

Для цього помножимо кожний рядок (6.1) відповідно на $V_1, V_2, ..., V_n$ і результат додамо:

$$a_1 [\, x^k V] + a_2 [\, x^{k-1} V] + ... + a_{k+1} [\, x^0 V] - [\, yV] = [VV]. \qquad (6.6)$$

Із умови

$$[VV] = \min\,, \qquad (6.7)$$

покладеної в основу визначення невідомих коефіцієнтів, слідує рівність нулю суми частинних похідних (6.7) по невідомим коефіцієнтам

$$\frac{\partial [V^2]}{\partial a_i} = 2\left[V \frac{\partial V}{\partial a} \right] = 0\,. \qquad (6.8)$$

В розгорнутому вигляді після скорочення на 2 це можна записати так:

$$\begin{array}{l} V_1 \dfrac{\partial V_1}{\partial a_1} + V_2 \dfrac{\partial V_2}{\partial a_1} + ... + V_n \dfrac{\partial V_n}{\partial a_1} = 0, \\ V_1 \dfrac{\partial V_1}{\partial a_2} + V_2 \dfrac{\partial V_2}{\partial a_2} + ... + V_n \dfrac{\partial V_n}{\partial a_2} = 0, \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ V_1 \dfrac{\partial V_1}{\partial a_{k+1}} + V_2 \dfrac{\partial V_2}{\partial a_{k+1}} + ... + V_n \dfrac{\partial V_n}{\partial a_{k+1}} = 0. \end{array} \qquad (6.9)$$

Це і є система нормальних рівнянь, які витікають із (6.6).

Але із (6.1) слідує

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial V_1}{\partial a_1} = x_1^k, \quad \dfrac{\partial V_2}{\partial a_1} = x_2^k, \quad ..., \quad \dfrac{\partial V_n}{\partial a_1} = x_n^k, \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial a_2} = x_1^{k-1}, \; \dfrac{\partial V_2}{\partial a_2} = x_2^{k-1}, \; ..., \; \dfrac{\partial V_n}{\partial a_2} = x_n^{k-1}, \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial a_{k+1}} = x_1^0, \; \dfrac{\partial V_2}{\partial a_{k+1}} = x_2^0, \; ..., \; \dfrac{\partial V_n}{\partial_{\;k+1}} = x_n^0. \end{array} \qquad (6.10)$$

Підставляючи ці значення в (6.9), будемо мати

$$\begin{aligned} &[Vx^k] \ \ =0, \\ &[Vx^{k-1}]=0, \\ &\dots \ \ \dots \ \ \dots \\ &[Vx^0] \ \ \ =0. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Таким чином, система нормальних рівнянь буде мати вигляд

$$\begin{aligned} &a_1[x^k x^k] \ \ +a_2[x^{k-1}x^k] \ \ +\dots+a_{k+1}[x^0x^k] \ \ -[x^k y] \ \ =0, \\ &a_1[x^k x^{k-1}]+a_2[x^{k-1}x^{k-1}]+\dots+a_{k+1}[x^0x^{k-1}]-[x^{k-1}y]=0, \\ &\dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \\ &a_1[x^k x^0] \ \ +a_2[x^{k-1}x^0] \ \ +\dots+a_{k+1}[x^0x^0] \ \ -[x^0 y] \ \ =0. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Якщо систему відобразити графічно, то по правій діагоналі, проведеній від верхнього лівого кута до правого нижнього, розташовані квадратні суми $[x^k][x^k]$, $[x^{k-1}][x^{k-1}], \dots$, які завжди додатні. Суми, розміщені симетрично по відношенню до діагоналі $[x^k x^{k-1}]$, $[x^{k-1}x^k], \dots$, попарно рівні між собою.

6.4. Рішення системи нормальних рівнянь

Визначимо із першого рівняння (6.12) значення a_1:

$$a_1=-a_2\frac{[x^{k-1}x^k]}{[x^k x^k]}-a_3\frac{[x^{k-2}x^k]}{[x^k x^k]}-\dots-a_{k+1}\frac{[x^0x^k]}{[x^k x^k]}+\frac{[x^k y]}{[x^k x^k]} \tag{6.13}$$

і підставимо його в остальні рівняння. Отримаємо систему рівнянь з числом невідомих, меншим на одиницю, ніж в (6.12):

$$a_2\left([x^{k-1}x^{k-1}]-\frac{[x^{k-1}x^k][x^kx^{k-1}]}{[x^kx^k]}\right)+a_3\left([x^{k-2}x^{k-1}]-\frac{[x^{k-2}x^k][x^kx^{k-1}]}{[x^kx^k]}\right)+\ldots+$$

$$+a_{k+1}\left([x^{k-1}x^0]-\frac{[x^0x^k][x^kx^{k-1}]}{[x^kx^k]}\right)-\left([x^{k-1}y]-\frac{[x^ky][x^kx^{k-1}]}{[x^kx^k]}\right)=0.$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \tag{6.14}$$

$$a_2\left([x^{k-1}x^0]-\frac{[x^{k-1}x^k][x^kx^0]}{[x^kx^k]}\right)+a_3\left([x^{k-2}x^0]-\frac{[x^{k-2}x^k][x^kx^0]}{[x^kx^k]}\right)+\ldots+$$

$$+a_{k+1}\left([x^0]-\frac{[x^0x^k][x^kx^0]}{[x^kx^k]}\right)-\left([y]-\frac{[x^ky][x^kx^0]}{[x^kx^k]}\right)=0.$$

6.5. Позначення алгоритмів Гауса

Введемо позначення:

$$\left([x^{k-1}x^{k-1}]-\frac{[x^{k-1}x^k][x^kx^{k-1}]}{[x^kx^k]}\right)=[x^{k-1}x^{k-1}\cdot 1],$$

$$\left([x^{k-2}x^{k-1}]-\frac{[x^{k-2}x^k][x^kx^{k-1}]}{[x^kx^k]}\right)=[x^{k-2}x^{k-1}\cdot 1],$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\left([x^0x^{k-1}]-\frac{[x^0x^k][x^kx^{k-1}]}{[x^kx^k]}\right)=[x^0x^{k-1}\cdot 1],$$

$$\left([x^{k-1}y]-\frac{[x^ky][x^kx^{k-1}]}{[x^kx^k]}\right)=[x^{k-1}y\cdot 1],$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\left([x^{k-2}x^0]-\frac{[x^{k-2}x^k][x^kx^0]}{[x^kx^k]}\right)=[x^{k-2}x^0\cdot 1],$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\left([x^0]-\frac{[x^0x^k][x^0x^k]}{[x^kx^k]}\right)=[x^0\cdot 1], \tag{6.15}$$

$$\left([x^0y]-\frac{[x^kx^0][x^ky]}{[x^kx^k]}\right)=[x^0y\cdot 1].$$

Таким чином, система нормальних рівнянь (6.14) в алгоритмах Гауса буде мати вигляд:

$$
\begin{aligned}
&a_2[x^{k-1}x^{k-1}\cdot 1]+a_3[x^{k-2}x^{k-1}\cdot 1]+a_4[x^{k-3}x^{k-1}\cdot 1]+\ldots+a_{k+1}[x^0x^{k-1}\cdot 1]-[x^{k-1}y\cdot 1]=0,\\
&a_2[x^{k-1}x^{k-2}\cdot 1]+a_3[x^{k-2}x^{k-2}\cdot 1]+a_4[x^{k-3}x^{k-2}\cdot 1]+\ldots+a_{k+1}[x^0x^{k-2}\cdot 1]-[x^{k-2}y\cdot 1]=0,\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\
&a_2[x^{k-1}x^0\cdot 1]+a_3[x^{k-2}x^0\cdot 1]+a_4[x^{k-3}x^0\cdot 1]+\ldots+a_{k+1}[x^0x^0\cdot 1]-[x^0y\cdot 1]=0.
\end{aligned}
\tag{6.16}
$$

Визначивши із першого рівняння цієї системи значення a_2:

$$
a_2=-\frac{[x^{k-2}x^{k-1}\cdot 1]}{[x^{k-1}x^{k-1}\cdot 1]}a_3-\frac{[x^{k-3}x^{k-1}\cdot 1]}{[x^{k-1}x^{k-1}\cdot 1]}a_4-\ldots-\frac{[x^0x^{k-1}\cdot 1]}{[x^{k-1}x^{k-1}\cdot 1]}a_{k+1}+\frac{[x^{k-1}y\cdot 1]}{[x^{k-1}x^{k-1}\cdot 1]}
\tag{6.17}
$$

і підставивши його у всі остальні рівняння, отримаємо нову систему з числом невідомих, меншим на 2 у порівнянні з (6.12):

$$
\begin{aligned}
&a_3[x^{k-2}x^{k-2}\cdot 2]+a_4[x^{k-3}x^{k-2}\cdot 2]+\ldots+a_{k+1}[x^0x^{k-2}\cdot 2]-[x^{k-2}y\cdot 2]=0,\\
&a_3[x^{k-2}x^{k-3}\cdot 2]+a_4[x^{k-3}x^{k-3}\cdot 2]+\ldots+a_{k+1}[x^0x^{k-3}\cdot 2]-[x^{k-3}y\cdot 2]=0,\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\
&a_3[x^{k-2}x^0\cdot 2]+a_4[x^{k-3}x^0\cdot 2]+\ldots+a_{k+1}[x^0x^0\cdot 2]-[x^0y\cdot 2]=0.
\end{aligned}
\tag{6.18}
$$

Продовжуючи таким же чином виключення невідомих, ми в кінці отримаємо тільки одне рівняння з одним невідомим:

$$
a_{k+1}[x^0x^0\cdot k]=[x^0y\cdot k].
\tag{6.19}
$$

Звідси

$$
a_{k+1}=\frac{[x^0y\cdot k]}{[x^0x^0\cdot k]}.
\tag{6.20}
$$

Визначення інших коефіцієнтів проводиться послідовно оберненим ходом від рівняння (6.20) до рівняння (6.17) і (6.13).

Якщо із перших рядків системи нормальних рівнянь і перетворених систем (6.16), (6.18) і (6.19) скласти нову систему рівнянь, то вона буде еквівалентна системі нормальних рівнянь (6.12) і нею можна замінити цю систему:

$$
\begin{aligned}
&a_1[x^k x^k] + a_2[x^{k-1}x^k] + a_3[x^{k-2}x^k] + \ldots + a_{k+1}[x^0 x^k] - [x^k y] = 0,\\
&\quad a_2[x^{k-1}x^{k-1}\cdot 1] + a_3[x^{k-2}x^{k-1}\cdot 1] + \ldots + a_{k+1}[x^0 x^{k-1}\cdot 1] - [x^{k-1}y\cdot 1] = 0,\\
&\qquad a_3[x^{k-2}x^{k-2}\cdot 2] + \ldots + a_{k+1}[x^0 x^{k-2}\cdot 2] - [x^{k-2}y\cdot 2] = 0,\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad a_{k+1}[x^0 x^0\cdot k] - [x^0 y\cdot k] = 0.
\end{aligned} \tag{6.21}
$$

6.6. Розкриття алгоритмів Гауса

Розглядаючи позначення (алгоритми) Гауса (6.15), легко сформулювати загальне правило їх розкриття.

Будь-який алгоритм після розкриття представляє собою різницю двох членів. Перший член отримується шляхом зменшення на одиницю числового значка розкриваємого алгоритму. Другий член являється дробом, знаменником якого є квадратична сума, яка стоїть при невідомому коефіцієнті a_i в системі нормальних рівнянь зі значком символу розкриваємої суми. Чисельником являється добуток двох сум, буквене позначення кожної з яких складається із одного значка першого члена і одного значка знаменника. Числовий індекс всіх сум другого члена (як і першого) на одиницю менший індекса розкриваємого позначення.

Слідуючи цьому правилу, можна записати, наприклад:

$$
[x^{k-4}x^{k-5}\cdot 4] = [x^{k-4}x^{k-5}\cdot 3] - \frac{[x^{k-4}x^{k-3}\cdot 3][x^{k-5}x^{k-3}\cdot 3]}{[x^{k-3}x^{k-3}\cdot 3]} \tag{6.22}
$$

Продовжимо розгортати праву частину (6.22), розкриваючи всякий раз тільки перший член і залишаючи незмінним другий:

$$
\begin{aligned}
&[x^{k-4}x^{k-5}\cdot 4] = [x^{k-4}x^{k-5}\cdot 2] - \frac{[x^{k-4}x^{k-2}\cdot 2][x^{k-5}x^{k-2}\cdot 2]}{[x^{k-2}x^{k-2}\cdot 2]} - \frac{[x^{k-4}x^{k-3}\cdot 3][x^{k-5}x^{k-3}\cdot 3]}{[x^{k-3}x^{k-3}\cdot 3]} =\\
&= [x^{k-4}x^{k-5}\cdot 1] - \frac{[x^{k-4}x^{k-1}\cdot 1][x^{k-5}x^{k-1}\cdot 1]}{[x^{k-1}x^{k-1}\cdot 1]} - \frac{[x^{k-4}x^{k-2}\cdot 2][x^{k-5}x^{k-2}\cdot 2]}{[x^{k-2}x^{k-2}\cdot 2]} -\\
&- \frac{[x^{k-4}x^{k-1}\cdot 1][x^{k-5}x^{k-1}\cdot 1]}{[x^{k-1}\cdot 1][x^{k-1}\cdot 1]} - \frac{[x^{k-4}x^{k-2}\cdot 2][x^{k-5}x^{k-2}\cdot 2]}{[x^{k-2}x^{k-2}\cdot 2]} - \frac{[x^{k-4}x^{k-3}\cdot 3][x^{k-5}x^{k-3}\cdot 3]}{[x^{k-3}x^{k-3}\cdot 3]}.
\end{aligned} \tag{6.23}
$$

6.7. Заключний контроль

Для виводу формул заключного контролю помножимо кожний рядок (6.1) на відповідне значення V_i. Після додавання отримаємо

$$a_1[x^k V] + a_2[x^{k-1}V] + \ldots + a_{k+1}[x^0 V] - [yV] = [VV]. \qquad (6.24)$$

Так як у відповідності з (6.11)

$$[x^k V] = [x^{k-1}V] = \ldots = [x^0 V] = 0,$$

то

$$-[yV] = [VV]. \qquad (6.25)$$

Далі помножимо кожний рядок (6.1) на відповідне значення y_i. Додавання результатів дає

$$a_1[x^k y] + a_2[x^{k-1}y] + \ldots + a_{k+1}[x^0 y] - [y^2] = [yV]. \qquad (6.26)$$

Якщо при рішенні нормальних рівнянь по схемі Гауса підставляти в (6.26) значення виключаємих невідомих, то в кінцевому рахунку отримаємо

$$[x^0 y \cdot k]a_{k+1} - [yy \cdot k] = [yV]. \qquad (6.27)$$

Підставляючи сюди значення a_{k+1} із (6.20)

$$a_{k+1} = \frac{[x^0 y \cdot k]}{[x^0 x^0 \cdot k]},$$

отримаємо

$$\frac{[x^0 y \cdot k][x^0 y \cdot k]}{[x^0 x^0 \cdot k]} - [yy \cdot k] = [yV]. \qquad (6.28)$$

Ліва частина (6.28) за позначенням Гауса дорівнює $[yy \cdot (k+1)]$.

Тому

$$-[yy \cdot (k+1)] = [yV]. \qquad (6.29)$$

Співставляючи це з (6.25), заключаємо

$$[VV] = -[yV] = [yy \cdot (k+1)]. \qquad (6.30)$$

Якщо суму $[yy \cdot (k+1)]$ розкрити, залишаючи незмінними інші члени, то аналогічно (6.23) отримаємо

$$[VV]=[yy]-\frac{[x^k y][x^k y]}{[x^k x^k]}-\frac{[x^{k-1}y][x^{k-1}y\cdot 1]}{[x^{k-1}x^{k-1}\cdot 1]}-\ldots-\frac{[x^0 y\cdot k][x^0 y\cdot k]}{[x^0 x^0\cdot k]}. \qquad (6.31)$$

Із (6.25) і (6.26) випливає формула, яка може бути використана для заключного контролю обчислень

$$[VV]=[y^2]-a_1[x^k y]-a_2[x^{k-1}y]-\ldots-a_{k+1}[x^0 y]. \qquad (6.32)$$

Часткові значення цієї загальної формули можуть бути виведені в кожному конкретному випадку.

Формули (6.30), (6.32) дають надійний заключний контроль обчислень. При невеликій кількості визначаємих коефіцієнтів цього контролю цілком достатньо. При кількості визначаємих невідомих, більшій трьох, необхідно користуватися проміжним, порядковим контролем, який дає впевненість в правильності виконаної частини обчислень.

Утворимо суми числових значень визначених величин, які входять в систему початкових рівнянь (6.1):

$$\begin{array}{l} x_1^k+x_1^{k-1}+x_1^{k-2}+\ldots+x_1+x_1^0-y_1=S_1, \\ x_2^k+x_2^{k-1}+x_2^{k-2}+\ldots+x_2+x_2^0-y_2=S_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_n^k+x_n^{k-1}+x_n^{k-2}+\ldots+x_n+x_n^0-y_n=S_n. \end{array} \qquad (6.33)$$

Помножимо кожний рядок цих рівностей відповідно на $x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k$ і складемо їх, потім помножимо кожний рядок відповідно на $x_1^{k-1}, x_2^{k-1}, \ldots, x_n^{k-1}$ і знову складемо. Продовжуючи такі множення на x_i^{k-1} із зменшеним кожний раз на одиницю показником степені і додаючи рівності, отримаємо ряд написаних нижче рівностей. Процес закінчимо множенням рівностей (6.33) відповідно на $y_1, y_2, \ldots, y_n$ і складемо їх.

Будемо мати

$$
\begin{aligned}
&[x^k x^k] \quad +[x^{k-1}x^k] \quad + \ldots +[x^0 x^k] \quad -[x^k y] \quad =[x^k S],\\
&[x^k x^{k-1}]+[x^{k-1}x^{k-1}]+ \ldots +[x^0 x^{k-1}]-[x^{k-1} y]=[x^{k-1} S],\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
&[x^k x^0] \quad +[x^{k-1}x^0] \quad + \ldots +[x^0 x^0] \quad -[x^0 y] \quad =[x^0 S],\\
&[x^k y] \quad +[x^{k-1}y] \quad + \ldots +[x^0 y] \quad -[y y] \quad =[y S].
\end{aligned}
\tag{6.34}
$$

Легко встановити за допомогою розкриття, що

$$
\begin{aligned}
&[x^{k-1}x^{k-1}\cdot 1]+[x^{k-1}x^k\cdot 1]+\ldots+[x^0 x^{k-1}\cdot 1]-[x^{k-1}y\cdot 1]=[x^{k-1}S\cdot 1],\\
&[x^{k-2}x^{k-2}\cdot 2]+\ldots+[x^0 x^{k-2}\cdot 2]-[x^{k-2}\cdot 2]=[x^{k-2}S\cdot 2],\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
&\qquad\qquad\qquad -[yy\cdot(k+1)]=[yS\cdot(k+1)].
\end{aligned}
\tag{6.35}
$$

Формули (6.35) дають можливість контролювати рішення нормальних рівнянь за допомогою сум $[x^k S], [x^{k+1}S\cdot 1], \ldots, [yS\cdot(k+1)]$.

Ці суми обчислюються одночасно із рішенням нормальних рівнянь.

Останню формулу із (6.35) можна об'єднати із виведеними раніше

$$[VV]=-[yV]=[yy\cdot(k+1)]=-[yS\cdot(k+1)]. \tag{6.36}$$

Аналогічно, шляхом множення (6.1) на відповідні суми $S_1, S_2, \ldots, S_n$ і додаючи результати, можна отримати

$$[x^k S]a_1+[x^{k-1}S]a_2+\ldots+[xS]a_k+[x^0 S]a_{k+1}+[yS]=[VV], \tag{6.37}$$

контролем для якого буде

$$[x^k S]+[x^{k-1}S]+\ldots+[yS]=[SS]. \tag{6.38}$$

Послідовне виключення невідомих із прийомом, описаним раніше, приводить до рівності

$$[yS\cdot(k+1)]=-[VV].$$

Таким чином, маємо накінець

$$[VV]=-[yV]=[yy\cdot(k+1)]=[SS\cdot(k+1)]=-[yS\cdot(k+1)]. \tag{6.39}$$

Обчислення контрольних сум $[x^k y], [x^k S], [x^{k-1}y], [x^{k-1}S], \ldots,$ $[x^0 y], [x^0 S], [yy], [yS], [SS]$ виконується попутно із обчисленням сум при невідомих коефіцієнтах, для чого в таблицях обчислення вказаних сум додаються відповідні стовпчики.

Рівність $[yy\cdot(k+1)] = -[yS\cdot(k+1)] = [SS\cdot(k+1)]$ використовується для контролю обчислень після виключення невідомих, а рівності

$$[VV] = -[yV]$$

і

$$[yy] - [x^k y]a_1 - [x^{k-1}y]a_2 - ... - [x^0 y]a_{k+1} = [VV]$$

служать для кінцевого контролю обчислень всіх значень невідомих і ймовірніших відхилень.

Замітимо, що в тому випадку, коли залежність між результатами визначень виражається рівнянням степені *k*, що має вільний член, то цей вільний член можна виключити попередньо перед зрівноваженням і розв’язати систему нормальних рівнянь з кількістю невідомих, на одиницю меншою даної.

Нехай маємо систему початкових умов

$$\begin{aligned} &a_1 x_1^k + a_2 x_1^{k-1} + a_3 x_1^{k-2} + ... + a_k x_1 + a_{k+1} - y_1 = V_1, \\ &a_1 x_2^k + a_2 x_2^{k-1} + a_3 x_2^{k-2} + ... + a_k x_2 + a_{k+1} - y_2 = V_2, \\ &... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ &a_1 x_n^k + a_2 x_n^{k-1} + a_3 x_n^{k-2} + ... + a_k x_n + a_{k+1} - y_n = V_n. \end{aligned} \qquad (6.40)$$

Система нормальних рівнянь буде

$$\begin{aligned} &a_1[x^k x^k] + a_2[x^{k-1}x^k] + ... + a_k[xx^k] + a_{k+1}[x^0 x^k] - [x^k y] = 0, \\ &a_1[x^k x^{k-1}] + a_2[x^{k-1}x^{k-1}] + ... + a_k[xx^{k-1}] + a_{k+1}[x^0 x^{k-1}] - [x^{k-1}y] = 0, \\ &... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ &a_1[x^k x^0] + a_2[x^{k-1}x^0] + ... + a_k[xx^0] + a_{k+1}[x^0 x^0] - [x^0 y] = 0. \end{aligned} \qquad (6.41)$$

При цьому $x^0 = 1$, $[x^0 x^0] = n$.

Визначимо із останнього нормального рівняння коефіцієнт

$$a_{k+1} = -a_1\frac{[x^k]}{n} - a_2\frac{[x^{k-1}]}{n} - ... - a_k\frac{[x]}{n} + \frac{[y]}{n} \qquad (6.42)$$

і підставимо його в систему початкових рівнянь.

Отримаємо

$$
\begin{aligned}
&a_1\left(x_1^k-\frac{[x^k]}{n}\right)+a_2\left(x_1^{k-1}-\frac{[x^{k-1}]}{n}\right)+\ldots+a_k\left(x_1-\frac{[x]}{n}\right)-\left(y_1-\frac{[y]}{n}\right)=V_1,\\
&a_1\left(x_2^k-\frac{[x^k]}{n}\right)+a_2\left(x_2^{k-1}-\frac{[x^{k-1}]}{n}\right)+\ldots+a_k\left(x_2-\frac{[x]}{n}\right)-\left(y_2-\frac{[y]}{n}\right)=V_2,\\
&\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\
&a_1\left(x_n^k-\frac{[x^k]}{n}\right)+a_2\left(x_n^{k-1}-\frac{[x^{k-1}]}{n}\right)+\ldots+a_k\left(x_n-\frac{[x]}{n}\right)-\left(y_n-\frac{[y]}{n}\right)=V_n.
\end{aligned}
\tag{6.43}
$$

Якщо ввести позначення

$$
\begin{aligned}
&x_i^\ell-\frac{[x^\ell]}{n}=X_i^\ell,\\
&y_i-\frac{[y]}{n}=Y_i
\end{aligned}
\tag{6.44}
$$

то система початкових рівнянь буде

$$
\begin{aligned}
&a_1X_1^k+a_2X_1^{k-1}+a_3X_1^{k-2}+\ldots+a_kX_1-Y_1=V_1,\\
&a_1X_2^k+a_2X_2^{k-1}+a_3X_2^{k-2}+\ldots+a_kX_2-Y_2=V_2,\\
&\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\
&a_1X_n^k+a_2X_n^{k-1}+a_3X_n^{k-2}+\ldots+a_kX_n-Y_n=V_n.
\end{aligned}
\tag{6.45}
$$

Нормальні рівняння будуть мати вигляд

$$
\begin{aligned}
&a_1[X^kX^k]+a_2[X^kX^{k-1}]+\ldots+a_k[X^kX]-[X^kY]=0,\\
&a_1[X^kX^{k-1}]+a_2[X^{k-1}X^{k-1}]+\ldots+a_{k+1}[X^{k-1}X]-[X^{k-1}Y]=0,\\
&\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\
&a_1[X^kX]+a_2[X^{k-1}X]+\ldots+a_{k+1}[XX]-[XY]=0.
\end{aligned}
\tag{6.46}
$$

Рішення нормальних рівнянь виконується звичайним шляхом. Останній коефіцієнт a_{k+1} визначається за формулою (6.42).

Лекція 7. Визначення коефіцієнтів нормальних рівнянь кубічного поліному

7.1. Підготовка обчислювальної таблиці

Приведемо схему складання коефіцієнтів нормальних рівнянь кубічного поліному

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ . \tag{7.1}$$

Таблиця 7.1.

Елементи формул нормальних рівнянь

№ п/п	x	y	x^0	x^2	x^3	S	x^3x^3	x^3x	x^3y
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	x_1	y_1	1	x_1^2	x_1^3	S_1	$x_1^3x_1^3$	$x_1^3x_1$	$x_1^3y_1$
2	x_2	y_2	1	x_2^2	x_2^3	S_2	$x_2^3x_2^3$	$x_2^3x_2$	$x_2^3y_2$
3	x_3	y_3	1	x_3^2	x_3^3	S_3	$x_3^3x_3^3$	$x_3^3x_3$	$x_3^3y_3$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
n	**Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**	y_n	1	x_n^2	x_n^3	S_n	$x_n^3x_n^3$	$x_n^3x_n$	$x_n^3y_n$
Σ	$[x]$	$[y]$	n	$[x^2]$	$[x^3]$	$[S]$	$[x^3x^3]$	$[x^3x]$	$[x^3y]$

Продовження таблиці 7.1.

№ п/п	x	y	x^3S	x^2x^3	x^2y	x^2S	xy	xS
1	2	3	11	12	13	14	15	16
1	x_1	y_1	$x_1^3S_1$	$x_1^2x_1^3$	$x_1^2y_1$	$x_1^2S_1$	x_1y_1	x_1S_1
2	x_2	y_2	$x_2^3S_2$	$x_2^2x_2^3$	$x_2^2y_2$	$x_2^2S_2$	x_2y_2	x_2S_2
3	x_3	y_3	$x_3^3S_3$	$x_3^2x_3^3$	$x_3^2y_3$	$x_3^2S_3$	x_3y_3	x_3S_3
…	…	…		…	…	…	…	…
…	…	…		…	…	…	…	…
n	x_n	y_n	$x_n^3S_n$	$x_n^2x_n^3$	$x_n^2y_n$	$x_n^2S_n$	x_ny_n	x_nS_n
Σ	$[x]$	$[y]$	$[x^3S]$	$[x^2x^3]$	$[x^2y]$	$[x^2S]$	$[xy]$	$[xS]$

Коефіцієнти S розраховуються за формулою

$$S = x + x^0 + x^2 + x^3 - y \tag{7.2}$$

7.2. Схема рішення нормальних рівнянь

Таблиця 7.2.

Схема рішення нормальних рівнянь

№ п/п	a	b	c	d	y	Σ	x
1	2	3	4	5	6	7	8
1	$[x^3x^3]$	$[x^3x^2]$	$[x^3x]$	$[x^3x^0]$	$-[x^3y]$	$[x^3S]$	
2	$-\dfrac{1}{[x^3x^3]}$	$-\dfrac{[x^3x^2]}{[x^3x^3]}$	$-\dfrac{[x^3x]}{[x^3x^3]}$	$-\dfrac{[x^3x^0]}{[x^3x^3]}$	$\dfrac{[x^3y]}{[x^3x^3]}$	$-\dfrac{[x^3S]}{[x^3x^3]}$	Контроль
3		$[x^2x^2]$	$[x^2x]$	$[x^2x^0]$	$-[x^2y]$	$[x^2S]$	
4		$-\dfrac{[x^3x^2][x^3x^2]}{[x^3x^3]}$	$-\dfrac{[x^3x^2][x^3x]}{[x^3x^3]}$	$-\dfrac{[x^3x^2][x^3x^0]}{[x^3x^3]}$	$\dfrac{[x^3x^2][x^3y]}{[x^3x^3]}$	$-\dfrac{[x^3x^2][x^3S]}{[x^3x^3]}$	
5		$[x^2x^2\cdot 1]$	$[x^2x\cdot 1]$	$[x^2x^0\cdot 1]$	$-[x^2y\cdot 1]$	$[x^2S\cdot 1]$	Контроль
6		$-\dfrac{1}{[x^2x^2\cdot 1]}$	$-\dfrac{[x^2x\cdot 1]}{[x^2x^2\cdot 1]}$	$-\dfrac{[x^2x^0\cdot 1]}{[x^2x^2\cdot 1]}$	$\dfrac{[x^2y\cdot 1]}{[x^2x^2\cdot 1]}$	$-\dfrac{[x^2S\cdot 1]}{[x^2x^2\cdot 1]}$	Контроль
7			$[xx]$	$[xx^0]$	$-[xy]$	$[xS]$	
8			$-\dfrac{[x^3x][x^3x]}{[x^3x^3]}$	$-\dfrac{[x^3x][x^3x^2]}{[x^3x^3]}$	$\dfrac{[x^3x][x^3y]}{[x^3x^3]}$	$-\dfrac{[x^3x][x^3S]}{[x^3x^3]}$	
9			$-\dfrac{[x^2x\cdot 1][x^2x\cdot 1]}{[x^2x^2\cdot 1]}$	$-\dfrac{[x^3x\cdot 1][x^2x\cdot 1]}{[x^2x^2\cdot 1]}$	$-\dfrac{[x^2x\cdot 1][x^2y\cdot 1]}{[x^2x^2\cdot 1]}$	$-\dfrac{[x^2x\cdot 1][x^2S\cdot 1]}{[x^2x^2\cdot 1]}$	
10			$[xx\cdot 2]$	$[xx^0\cdot 2]$	$-[xy\cdot 2]$	$[xS\cdot 2]$	Контроль
11			$-\dfrac{1}{[xx\cdot 2]}$	$-\dfrac{[xx^0\cdot 2]}{[xx\cdot 2]}$	$\dfrac{[xy\cdot 2]}{[xx\cdot 2]}$	$-\dfrac{[xS\cdot 2]}{[xx\cdot 2]}$	Контроль
12				$[x^0x^0]$	$-[x^0y]$	$[x^0S]$	
13				$-\dfrac{[x^3x^0][x^3x^0]}{[x^3x^3]}$	$\dfrac{[x^3x^0][x^3y]}{[x^3x^3]}$	$-\dfrac{[x^3x^0][x^3S]}{[x^3x^3]}$	
14				$-\dfrac{[x^2x^0\cdot 1][x^2x^0\cdot 1]}{[x^2x^2\cdot 1]}$	$\dfrac{[x^2x^0\cdot 1][x^2y\cdot 1]}{[x^2x^2\cdot 1]}$	$-\dfrac{[x^2x^0\cdot 1][x^2S\cdot 1]}{[x^2x^2\cdot 1]}$	
15				$-\dfrac{[xx^0\cdot 2][xx^0\cdot 2]}{[xx\cdot 2]}$	$\dfrac{[xx^0\cdot 2][xy\cdot 2]}{[xx\cdot 2]}$	$-\dfrac{[xx^0\cdot 2][xS\cdot 2]}{[xx\cdot 2]}$	
16				$[x^0x^0\cdot 3]$	$-[x^0y\cdot 3]$	$[x^0S\cdot 3]$	Контроль
17				$-\dfrac{1}{[x^0x^0\cdot 3]}$	$\dfrac{[x^0y\cdot 3]}{[x^0x^0\cdot 3]}$	$-\dfrac{[x^0S\cdot 3]}{[x^0x^0\cdot 3]}$	Контроль
18	$\dfrac{[x^3y]}{[x^3x^3]}$	$\dfrac{[x^2y\cdot 1]}{[x^2x^2\cdot 1]}$	$\dfrac{[xy\cdot 2]}{[xx\cdot 2]}$	$\dfrac{[x^0y\cdot 3]}{[x^0x^0\cdot 3]}$	$-[yy]$	$[yS]$	Контроль
19	$-\dfrac{[x^3x^0]}{[x^3x^3]}d$	$-\dfrac{[x^3x^0\cdot 1]}{[x^2x^2\cdot 1]}d$	$-\dfrac{[xx^0\cdot 2]}{[xx\cdot 2]}d$	d	$\dfrac{[x^3y][x^3y]}{[x^3x^3]}$	$-\dfrac{[x^3y][x^3S]}{[x^3x^3]}$	
20	$-\dfrac{[x^3x]}{[x^3x^3]}c$	$-\dfrac{[x^2x\cdot 1]}{[x^2x^2\cdot 1]}$	c		$\dfrac{[x^2y\cdot 1][x^2y\cdot 1]}{[x^2x^2\cdot 1]}$	$-\dfrac{[x^2y\cdot 1][x^2S\cdot 1]}{[x^2x^2\cdot 1]}$	

21	$-\frac{[x^3x^2]}{[x^3x^3]}b$	b			$\frac{[xy\cdot 2][xy\cdot 2]}{[xx\cdot 2]}$	$-\frac{[xy\cdot 2][xS\cdot 2]}{[xx\cdot 2]}$	
22	a				$\frac{[x^0y\cdot 3][x^0y\cdot 3]}{[x^0x^0\cdot 3]}$	$-\frac{[x^0y\cdot 3][x^0S\cdot 3]}{[x^0x^0\cdot 3]}$	
23					$-[yy\cdot 4]$	$[yS\cdot 4]$	

Обчислення і заповнення схеми в табл. 7.2 виконується в порядку нумерації рядків, за виключенням частини, виділеної в нижньому лівому кутку жирною рамкою. Ця частина схеми заповнюється після проведення заключного контролю

$$-[yy\cdot 4]=[yS\cdot 4] \tag{7.3}$$

також порядково.

Рядки 2, 6, 11, 17 утворюються шляхом множення всіх членів рядків 1, 5, 10, 16 на –1, поділену на перший член цих рядків. Наприклад, члени рядка 2 отримуються послідовним множенням $[x^3x^2], [x^3x], [x^3x^0]$, $-[x^3y], [x^3S]$ на $-\frac{1}{[x^3x^3]}$.

Контроль правильності обчислень рядків 2, 6, 11, 17 здійснюється додаванням членів кожного з цих рядків в 3, 4, 5 і 6-му стовпчиках з додаванням до кожної із сум –1. Отримані при цьому суми виписуються в стовпчик 8 на відповідному рядку і порівнюються з сумами тих же рядків стовпчика 7.

Правильність рішення підтверджується співпаданням вказаних сум стовпчиків 7 і 8.

Рядки 4, 8, 13 утворюються множенням всіх членів рядка 1, починаючи з члена, розташованого в одному стовпчику з першим членом цих рядків, на член рядка 2, також розташованому в одному стовпчику з першим членом утворюваного рядка. Наприклад, рядок 8 отримуємо множачи члени $[x^3x], [x^3x^0]$, $-[x^3y], [x^3S]$ на $-\frac{[x^3x]}{[x^3x^3]}$.

Контроль обчислення рядків 4, 8, 13 виконується шляхом додавання членів цих рядків по 6-й стовпчик включно. При цьому до суми членів 4-го рядка додається 2-й член першого рядка з оберненим знаком, до суми членів 8-го рядка – другий член 4-го рядка і третій член першого рядка з оберненим знаком, нарешті, до суми 13-го рядка додається другий член 8-го рядка, третій член 4-го рядка і четвертий член першого рядка з оберненим знаком.

Рядок 5 утворюється додаванням рядків 3 та 4 по стовпчикам і контролюється додаванням його членів.

Рядки 9 і 14 отримуються шляхом множення члена рядка 6, розташованого в одному стовпчику з першим членом утворюваних рядків, на всі члени рядка 5, починаючи з члена, розташованого в одному стовпчику з членом кожного утворюваного рядка.

Для контролю обчислень члени утворюваних рядків просумовуються з додаванням до суми 9-го рядка другого члена 5-го рядка з оберненим знаком, а до суми 14-го рядка – другого члена 9-го рядка і третього члена 5-го рядка з оберненим знаком.

Рядок 10 утворюється додаванням по стовпчикам рядків 7, 8 і 9. В якості контролю береться сума членів 10-го рядка.

Для утворення рядка 15 множаться всі члени рядка 10, починаючи з $[xx^0 \cdot 2]$, на член рядка 11 $-\dfrac{[xx^0 \cdot 2]}{[xx \cdot 2]}$.

Контролем обчислень служить сума членів рядка 15 з додаванням другого члена рядка 10 з оберненим знаком.

Рядок 16 утворюється за допомогою додавання по стовпчикам рядків 12, 13, 14 і 15.

Контролем обчислень служить сума членів утворюваного рядка.

Решта схеми пояснень не потребує.

7.3. Розробка програми рішення нормальних рівнянь

7.3.1. Призначення змінних і представлення трикутної матриці коефіцієнтів нормальних рівнянь

Таблиця 7.3.

Коефіцієнти нормальних рівнянь

	$x^3]$	$x^2]$	$x]$	$x^0]$	$y]$
$[x^3$	A	B	C	D	W
$[x^2$		E	F	G	H
$[x$			P	Q	R
$[x^0$				U	V

Таблиця 7.4.

Вихідні дані для контрольного розрахунку

	$x^3]$	$x^2]$	$x]$	$x^0]$	$y]$
$[x^3$	4543,4051	1543,207	533,1862	188,218	– 1492,237
$[x^2$		533,1862	188,218	68,26	– 582,81
$[x$			68,26	25,6	– 237,1
$[x^0$				10	– 101

Таблиця 7.5.

Робочі формули схеми Гауса

№		*a*	*b*	*c*	*d*	
1		A	B	C	D	W
2		–1	I = – B/A	J = – C/A	K = – D/A	L = – W/A
3			E	F	G	H
4			BI	BJ	BK	BL
5	Σ		E = E + BI	F = F + BJ	G = G + BK	H = H + BL
6			–1	M = – F/E	N = – G/E	O = – H/E;
7				P	Q	R
8				JC	KC	LC
9				FM	FN	FO
10	Σ		[cc·2] =	P=P+JC+FM	Q=Q+KC+FN	R=R+LC+FO
11				–1	S = – Q/P	T = – R/P
12		[dd·1]=	U+DK		U	V
13		[dd·2]=	U+DK+GN		DK	DL
14					GN	GO

15		$P_3/[cc{\cdot}2] = P_4/[dd{\cdot}2]$			QS	QT
16	Σ			$[dd{\cdot}3] = P_4 =$	U=U+DK+GN+QS	V=V+DL+GO+QT
17					–1	Y = – V/U
18		T=VI+ZJ+YK+L; V=ZM+YN+O; Z=SY+T				

7.3.2. Протокол №1 розрахунку за програмою

№ п/п	Введення даних	Результат	Позначення	№ п/п	Введення даних	Результат	Позначення
1	4543,4051		A			0,124637376	[dd·2]
2	1543,207		B			0,000871283	P_4=[dd·3]
3	533,1862		C		–1492,237		W
4	188,218		D		–582,81		H
5	533,1862		E		–237,1		R
6	188,218		F		–101		V
7	68,26		G			–4,56591906	a
8	68,26		P			32,61609629	b
9	25,6		Q			–83,1225168	c
10	10		U			86,19498514	d
11		0,075137202	[cc·2]				

7.3.3. Програма рішення чотирьох нормальних рівнянь з оцінкою точності елементів

Програма №5 [GAUSS1] рішення чотирьох нормальних рівнянь з оцінкою точності елементів

№	Оператори
1.	INPUT A, B, C, D, E, F, G, P Q, U;
2.	I = – B/A; J = – C/A; K = – D/A;
3.	E = E + BI; F = F + BJ; G = G + BK;
4.	M = – F/E; N = – G/E;
5.	P = P + JC + FM;
6.	Q = Q + KC + FN;
7.	S = – Q/P;
8.	X = U + DK + GN;
9.	U = X + SQ;
10.	PRINT "P =", P; ▲;
11.	PRINT "X =", X; ▲;
12.	PRINT "U =", U; ▲;
13.	LABEL 1: ;

14.	INPUT W, H, R, V;
15.	L = – W/A; H = H + BL;
16.	O = – H/E;
17.	R = R + LC + FO;
18.	T = – R/P;
19.	V = V + DL + GO + TQ;
20.	Y = – V/U;
21.	Z = SY + T;
22.	V = ZM + YN + O;
23.	T = VI + ZJ + YK + L;
24.	PRINT "T =", T; ▲;
25.	PRINT "V =", V; ▲;
26.	PRINT "Z =", Z; ▲;
27.	PRINT "Y =", Y; ▲;
28.	GOTO 1;
29.	END

Лекція 8. Оцінка точності результатів експериментальних даних і їх апроксимації

8.1. Встановлення зв'язку між істинними і ймовірнішими похибками

Спочатку встановимо зв'язок між істинними і ймовірнішими похибками експериментальних даних.

Маючи результати експериментальних досліджень $x_1, x_2, ..., x_n$, $y_1, y_2, ..., y_n$, можемо записати систему початкових рівнянь

$$\begin{aligned} &a_1 x_1^k + a_2 x_1^{k-1} + ... + a_k x_1 + a_{k+1} - y_1 = V_1, \\ &a_1 x_2^k + a_2 x_2^{k-1} + ... + a_k x_2 + a_{k+1} - y_2 = V_2, \\ &... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ &a_1 x_n^k + a_2 x_n^{k-1} + ... + a_k x_n + a_{k+1} - y_n = V_n. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Допустимо, що нам відомі істинні значення коефіцієнтів a_i. Позначимо їх через $A_1, A_2, ..., A_{k+1}$. Тоді, підставивши їх в систему (8.1), будемо мати в правій частині її істинні похибки

$$
\begin{aligned}
&A_1x_1^k + A_2x_1^{k-1} + \ldots + A_kx_1 + A_{k+1} - y_1 = \Delta_1, \\
&A_1x_2^k + A_2x_2^{k-1} + \ldots + A_kx_2 + A_{k+1} - y_2 = \Delta_2, \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
&A_1x_n^k + A_2x_n^{k-1} + \ldots + A_kx_n + A_{k+1} - y_n = \Delta_n.
\end{aligned} \tag{8.2}
$$

Віднімемо (8.2) із (8.1) і позначимо $a_i - A_i$ через α_i. Отримаємо нову систему рівнянь, еквівалентну системі (8.1):

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1x_1^k + \alpha_2x_1^{k-1} + \ldots + \alpha_kx_1 + \alpha_{k+1} + \Delta_1 = V_1, \\
&\alpha_1x_2^k + \alpha_2x_2^{k-1} + \ldots + \alpha_kx_2 + \alpha_{k+1} + \Delta_2 = V_2, \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
&\alpha_1x_n^k + \alpha_2x_n^{k-1} + \ldots + \alpha_kx_n + \alpha_{k+1} + \Delta_n = V_n.
\end{aligned} \tag{8.3}
$$

Легко довести, що цій системі властиві всі співвідношення, встановлені формулою (6.31). Тому можна записати:

$$[VV] = [\Delta\Delta] - \frac{[x^k\Delta]^2}{[x^kx^k]} - \frac{[x^{k-1}\Delta \cdot 1]^2}{[x^{k-1}x^{k-1} \cdot 1]} - \ldots - \frac{[x^0\Delta \cdot k]^2}{[x^0x^0 \cdot k]}. \tag{8.4}$$

Так як всі віднімаємі члени правої частини являються величинами додатніми, то суми квадратів істинних похибок, що цілком узгоджується із способом найменших квадратів.

Допустимо, що для кожного значення x_i було виконано не одне визначення відповідному y_i, а ℓ рівнянь типу (8.3):

$$[V_iV_i] = [\Delta_i\Delta_i] - \frac{[x^k\Delta_i]^2}{[x^kx^k]} - \frac{[x^{k-1}\Delta_i \cdot 1]^2}{[x^{k-1}x^{k-1} \cdot 1]} - \ldots - \frac{[x^0\Delta_i \cdot k]^2}{[x^0x^0 \cdot k]}. \tag{8.5}$$

Середнє із цих рівнянь буде

$$
\begin{aligned}
\frac{\sum[V_iV_i]}{\ell} &= \frac{\sum[\Delta_i\Delta_i]}{\ell} - \frac{1}{[x^kx^k]} \cdot \frac{\sum[x^k\Delta_i]^2}{\ell} - \frac{1}{[x^{k-1}x^{k-1} \cdot 1]} \cdot \frac{\sum[x^{k-1}\Delta_i \cdot 1]^2}{\ell} - \\
&- \ldots - \frac{1}{[xx \cdot k]} \cdot \frac{\sum[x^0\Delta_i \cdot k]^2}{\ell}.
\end{aligned} \tag{8.6}
$$

Розглянемо праву частину (8.6).

Розкриваючи перший член, будемо мати

$$\frac{\sum[\Delta_i\Delta_i]}{\ell} = \frac{[\Delta_{1i}^2]}{\ell} + \frac{[\Delta_{2i}^2]}{\ell} + \ldots + \frac{[\Delta_{ni}^2]}{\ell}, \tag{8.7}$$

де i змінюється від 1 до ℓ.

При достатньо великому ℓ кожний із членів правої частини (8.7) представляє собою квадрат середньої квадратичної похибки визначеного значення функції

$$[\Delta_{ji}^2] = m^2 . \tag{8.8}$$

Тому

$$\frac{\Sigma[\Delta_{ji}^2]}{\ell} = n m^2 , \tag{8.9}$$

де j змінюється від 1 до n.

Розкриємо другий член (8.6):

$$\frac{1}{[x^k x^k]} \cdot \frac{\Sigma[x^k \Delta_i]^2}{\ell} = \frac{1}{[x^k x^k]} \cdot \frac{\sum\left(x_1^k [\Delta_{1i}] + x_2^k [\Delta_{2i}] + \ldots + x_n^k [\Delta_{ni}]\right)^2}{\ell} ,$$

або

$$\frac{1}{[x^k x^k]} \cdot \frac{\Sigma[x^k \Delta_i]^2}{\ell} = \frac{1}{[x^k x^k]} \cdot \left(x_1 \frac{[\Delta_{1i}]^2}{\ell} + x_2^{2k} \frac{[\Delta_{2i}]^2}{\ell} + \ldots + x_n^2 \frac{[\Delta_{ni}]^2}{\ell} + \right.$$
$$\left. + 2x_1^k x_2^k \frac{[\Delta_{1i}][\Delta_{2i}]}{\ell} + 2x_1^k x_3^k \frac{[\Delta_{1i}][\Delta_{3i}]}{\ell} + \ldots + 2x_{n-1}^k x_n^k \frac{[\Delta_{(n-1)i}][\Delta_{ni}]}{\ell} \right) \tag{8.10}$$

при $i = 1, 2, ..., \ell$.

Але за властивостями випадкових похибок

$$[\Delta_{ji}]^2 = [\Delta_{ji}^2]$$

і

$$\frac{[\Delta_{ji}][\Delta_{ki}]}{\ell} = 0 \qquad \text{при } j \neq k, \ \ell \to \infty .$$

Тому

$$\frac{1}{[x^k x^k]} \cdot \frac{\Sigma[x^k \Delta_i]^2}{\ell} = \frac{1}{[x^k x^k]} \cdot \left(x_1^k x_1^k \frac{[\Delta_{1i}^2]}{\ell} + x_2^k x_2^k \frac{[\Delta_{2i}^2]}{\ell} + \ldots + x_n^k x_n^k \frac{[\Delta_{ni}^2]}{\ell} \right) =$$
$$= \frac{1}{[x^k x^k]} [x^k x^k] m^2 = m^2 . \tag{8.11}$$

Таким же чином можна довести, що

$$\frac{1}{[x^{k-1}x^{k-1}]}\cdot\frac{\sum[x^{k-1}\Delta_i^2]}{\ell}=m^2\ ,$$

$$\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots \tag{8.12}$$

$$\frac{1}{[x^0x^0]}\cdot\frac{\sum[x^0\Delta_i^2]}{\ell}=m^2\ .$$

Далі

$$\frac{1}{[x^{k-1}x^{k-1}]}\cdot\frac{\sum[x^{k-1}\Delta_i\cdot 1]^2}{\ell}=\frac{1}{[x^{k-1}x^{k-1}\cdot 1]}\cdot\frac{\sum\left([x^{k-1}\Delta_i]-\frac{[x^kx^{k-1}][x^k\Delta_i]^2}{[x^kx^k]}\right)}{\ell}=$$

$$=\frac{1}{[x^{k-1}x^{k-1}\cdot 1]}\cdot\frac{\sum\left([x^{k-1}\Delta_i]^2-2\frac{[x^kx^{k-1}][x^{k-1}\Delta_i][x^k\Delta_i]}{[x^kx^k]}+\frac{[x^kx^{k-1}]^2[x^k\Delta_i]^2}{[x^kx^k]^2}\right)}{\ell}\ .$$

Враховуючи (8.11) і (8.12), будемо мати

$$\frac{1}{[x^{k-1}x^{k-1}\cdot 1]}\cdot\frac{\sum[x^{k-1}\Delta_i]^2}{\ell}=\frac{1}{[x^{k-1}x^{k-1}\cdot 1]}\cdot\Bigg([x^{k-1}x^{k-1}]m^2+\frac{[x^{k-1}x^k]^2}{[x^kx^k]}m^2-$$

$$-2\frac{[x^{k-1}x^k]}{[x^kx^k]}\cdot\frac{[x^k\Delta_i][x^{k-1}\Delta_i]}{\ell}\Bigg). \tag{8.13}$$

Але

$$\frac{[x^k\Delta_i][x^{k-1}\Delta_i]}{\ell}=[x^kx^{k-1}]\,\frac{[\Delta_i]^2}{\ell}+\frac{[x_p^kx_q^k\Delta_{pi}\Delta_{qi}]}{\ell}\qquad \text{при } p\neq q\,.$$

Згідно властивостей випадкових похибок останній член дорівнює нулю.

Таким чином,

$$\frac{[x^k\Delta_i][x^{k-1}\Delta_i]}{\ell}=[x^kx^{k-1}]\,m\,. \tag{8.14}$$

Тому

$$\frac{1}{[x^{k-1}x^{k-1}\cdot 1]}\cdot\frac{\sum[x^{k-1}\Delta_i]^2}{\ell}=\frac{1}{[x^{k-1}x^{k-1}\cdot 1]}\cdot\Bigg([x^{k-1}x^{k-1}]m^2+\frac{[x^{k-1}x^k]^2}{[x^kx^k]}m^2-$$

$$-2\frac{[x^{k-1}x^k]^2}{[x^kx^k]}m^2\Bigg)=\frac{1}{[x^{k-1}x^{k-1}\cdot 1]}\ m^2\left([x^{k-1}x^{k-1}]-\frac{[x^{k-1}x^k]^2}{[x^kx^k]}\right)=m^2\ . \tag{8.15}$$

Аналогічно

$$\frac{1}{[x^{k-2}x^{k-1}\cdot 2]}\cdot\frac{\sum[x^{k-2}\Delta_i\cdot 2]}{\ell}=m^2 \;,$$

$$\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots \qquad (8.16)$$

$$\frac{1}{[x^0x^0\cdot k]}\cdot\frac{\sum[x^0\Delta_i\cdot k]^2}{\ell}=m^2 \;.$$

Таким чином, кінцевий вигляд рівності (8.6):

$$\sum\frac{[V_iV_i]}{\ell}-[V_iV_i]_{\text{ср.}}=nm^2-km^2=m^2(n-k). \qquad (8.17)$$

Звідси отримуємо

$$m=\sqrt{\frac{[VV]_{\text{ср.}}}{n\text{-}k}}\,. \qquad (8.18)$$

Таким чином, середня квадратична похибка безпосереднього визначення факторних і функціональних ознак дорівнює кореню квадратному із суми квадратів відхилень, поділеній на число визначень мінус число невідомих коефіцієнтів, які визначаються за способом найменших квадратів.

На практиці маємо не ℓ рядів визначень, а тільки один ряд.

Але при достатньо великому числі визначень формула

$$m=\sqrt{\frac{[VV]}{n\text{-}k}}\;, \qquad (8.19)$$

де середня сума квадратів відхилень замінена просто сумою квадратів відхилень, виконується з тим більшою точністю, чим більше число визначень.

8.2. Визначення ваги останнього невідомого

Перейдемо до питання про визначення ваги останнього невідомого.

Візьмемо випадок трьох невідомих. Згідно (6.20) маємо

$$a_3=\frac{[x^0y\cdot 2]}{[x^0x^0\cdot 2]}. \qquad (8.20)$$

Розкриємо чисельник правої частини

$$[x^0y\cdot 2]=[x^0y\cdot 1]-\frac{[x^0x\cdot 1]}{[xx\cdot 1]}[xy\cdot 1]=[x^0y]-\frac{[x^0x^2]}{[xx^2]}[x^2y]-$$
$$-\frac{[x^0x\cdot 1]}{[xx\cdot 1]}\left([xy]-\frac{[x^2x]}{[x^2x^2]}[x^2y]\right). \tag{8.21}$$

Звідси видно, що коефіцієнт a_3 являється лінійною функцією від визначених значень $y_1, y_2, ..., y_n$:

$$a_3=k_1y_1+k_2y_2+...+k_ny_n\ . \tag{8.22}$$

Співставляючи (8.19), (8.20) і (8.21), заключаємо, що

$$k_i=\frac{1}{[x^0x^0\cdot 2]}\left(x_i^0-\frac{[x^0x^2]}{[x^2][x^2]}x_i^2-\frac{[x^0x\cdot 1]}{[xx\cdot 1]}\left(x_i-\frac{[x^2x]}{[x^2x^2]}x_i^2\right)\right). \tag{8.23}$$

Враховуючи рівноточність визначень $y_1, y_2, ..., y_n$, для обчислення ваги коефіцієнта a_3 необхідно застосувати формулу

$$\frac{1}{P_{a_3}}=k_1^2+k_2^2+...+k_n^2. \tag{8.24}$$

Піднесення до квадрату кожної з величин k_i із (8.24) дає

$$k_i^2=\frac{1}{[x^0x^0\cdot 2]^2}\left(\left(x_i^0-\frac{[x^0x^2]}{[x^2x^2]}x_i^2\right)+\frac{[x^0x\cdot 1]^2}{[xx\cdot 1]}\left(x_i-\frac{[x^2x]}{[x^2x^2]}x_i^2\right)^2-\right.$$
$$\left.-2\left(x_i^0-\frac{[x^0x^2]}{[x^2x^2]}x_i^2\right)\frac{[x^0x\cdot 1]}{[xx\cdot 1]}\left(x_i-\frac{[x^2x]}{[x^2x^2]}x_i^2\right)\right).$$

Або

$$k_i^2=\frac{1}{[x^0x^0\cdot 2]^2}\left(\left(x_i^0x_i^0+\frac{[x^0x^2]^2}{[x^2x^2]}x_i^2x_i^2-2\frac{[x^0x^2]}{[x^2x^2]}x_i^0x_i^2\right)+\frac{[x^0x\cdot 1]^2}{[xx\cdot 1]^2}\left(x_ix_i+\frac{[x^2x]^2}{[x^2x^2]^2}x_i^2x_i^2-\right.\right.$$
$$\left.\left.-2\frac{[x^2x]}{[x^2x^2]}x_ix_i^2\right)-2\,\frac{[x^0x\cdot 1]}{[xx\cdot 1]}\left(x_i^0x_i+\frac{[x^0x^2][x^2x]}{[x^2x^2]^2}x_i^2x_i^2-\frac{[x^2x]}{[x^2x^2]}x_i^0x_i^0-\frac{[x^0x^2]}{[x^2x^2]}x_i^2x_i\right)\right).$$

Після додавання отримаємо

$$[k^2]=\frac{1}{[x^0x^0\cdot 2]^2}\left([x^0x^0]+\frac{[x^0x^2]}{[x^2x^2]}[x^2x^2]-2\frac{[x^0x^2]}{[x^2x^2]}[x^0x^2]+\frac{[x^0x\cdot 1]^2}{[xx\cdot 1]^2}\left([xx]+\frac{[x^2x]}{[x^2x^2]}[x^2x^2]-\right.\right.$$

$$\left.\left.-2\frac{[x^2x]}{[x^2x^2]}[xx^2]\right)-2\frac{[x^0x\cdot 1]}{[xx\cdot 1]}\left([x^0x]+\frac{[x^0x^2][x^2x]}{[x^2x^2]^2}[x^2x^2]-\frac{[x^2x]}{[x^2x^2]}[x^0x^2]-\frac{[x^0x^2]}{[x^2x^2]}[x^2x]\right)\right).$$

Даний вираз за допомогою перетворень приводиться до виду

$$[k^2]=\frac{1}{[x^0x^0\cdot 2]^2}\left([x^0x^0\cdot 1]+\frac{[x^0x\cdot 1]^2}{[xx\cdot 1]^2}[xx\cdot 1]-2\frac{[x^0x\cdot 1]}{[xx\cdot 1]}[x^0x\cdot 1]\right),$$

$$[k^2]=\frac{1}{[x^0x^0\cdot 2]^2}\left([x^0x^0\cdot 1]+\frac{[x^0x\cdot 1]^2}{[xx\cdot 1]}\right),$$

і $\quad [k^2]=\frac{1}{[x^0x^0\cdot 2]^2}[x^0x^0\cdot 2]$,

тобто

$$[k^2]=\frac{1}{[x^0x^0\cdot 2]}. \qquad (8.25)$$

Таким чином, приходимо до висновку, що вага останнього невідомого дорівнює коефіцієнту при цьому невідомому.

Цей висновок поширюється на будь-яку кількість невідомих, що можна довести за допомогою використання методу невизначених множників.

8.3. Визначення ваги передостаннього невідомого

Вагу коефіцієнта P_{a_2} можна визначити, якщо в системі рівнянь

$$\begin{aligned}&[xx\cdot 1]a_2+[xx^0\cdot 1]a_3-[xy\cdot 1]=0,\\&[xx^0\cdot 1]a_2+[x^0x^0\cdot 1]a_3-[x^0y\cdot 1]=0\end{aligned}$$

переставити (після виключення a_1) рядки і члени з невідомими так, щоб коефіцієнт a_2 став останнім:

$$\begin{aligned}&[x^0x^0\cdot 1]a_3+[xx^0\cdot 1]a_2-[x^0y]=0,\\&[xx^0\cdot 1]a_3+[xx\cdot 1]a_2-[xy\cdot 1]=0\end{aligned} \qquad (8.26)$$

і розв’язати ці два рівняння описаним вище шляхом.

Після перетворення коефіцієнт при останньому члені a_2, який за доведеним є його вагою, легко привести до вигляду

$$P_{a_2} = \frac{[xx \cdot 1]}{[x^0 x^0 \cdot 1]} [x^0 x^0 \cdot 2] ,$$

або

$$P_{a_2} = \frac{[xx \cdot 1]}{[x^0 x^0]} P_{a_3} \ . \tag{8.27}$$

Аналогічно можна отримати вагу коефіцієнта a_1: переставити рядки системи нормальних рівнянь і члени в рядках так, щоб коефіцієнт a_1 був на останньому місці і розв’язати її. Тоді коефіцієнт при останньому невідомому і буде вагою коефіцієнта a_1.

Знаючи вагу зрівноваженого по способу найменших квадратів коефіцієнта a_i, легко підрахувати і його середню квадратичну похибку за допомогою формули

$$m_{a_i} = \frac{m_y}{\sqrt{P_{a_i}}} = \sqrt{\frac{[VV]}{(n\text{-}k)P_{a_i}}} \ . \tag{8.28}$$

8.4. Оцінка точності елементів зрівноваження за допомогою визначників

Представимо визначник D у слідуючому вигляді:

$$D = \begin{vmatrix} [x^6] & [x^5] & [x^4] & [x^3] \\ [x^5] & [x^4] & [x^3] & [x^2] \\ [x^4] & [x^3] & [x^2] & [x] \\ [x^3] & [x^2] & [x] & n \end{vmatrix} \ . \tag{8.29}$$

Алгебраїчні доповнення діагональних елементів будуть

$$A_{11} = \begin{vmatrix} [x^4] & [x^3] & [x^2] \\ [x^3] & [x^2] & [x] \\ [x^2] & [x] & n \end{vmatrix} , \tag{8.30}$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} [x^6] & [x^4] & [x^3] \\ [x^4] & [x^2] & [x] \\ [x^3] & [x] & n \end{vmatrix}, \tag{8.31}$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} [x^6] & [x^5] & [x^3] \\ [x^5] & [x^4] & [x^2] \\ [x^3] & [x^2] & n \end{vmatrix}, \tag{8.32}$$

$$A_{44} = \begin{vmatrix} [x^6] & [x^5] & [x^4] \\ [x^5] & [x^4] & [x^3] \\ [x^4] & [x^3] & [x^2] \end{vmatrix}. \tag{8.33}$$

Середні квадратичні похибки визначаємих невідомих *a, b, c, d* розраховують за формулами

$$m_a = m\sqrt{\frac{A_{11}}{D}}, \tag{8.34}$$

$$m_b = m\sqrt{\frac{A_{22}}{D}}, \tag{8.35}$$

$$m_c = m\sqrt{\frac{A_{33}}{D}}, \tag{8.36}$$

$$m_d = m\sqrt{\frac{A_{44}}{D}}, \tag{8.37}$$

$$m = \sqrt{\frac{[VV]}{n-k}}. \tag{8.38}$$

При цьому обернені ваги зрівноважених коефіцієнтів:

$$\frac{1}{P_a} = \frac{A_{11}}{D}, \tag{8.39}$$

$$\frac{1}{P_b} = \frac{A_{22}}{D}, \tag{8.40}$$

$$\frac{1}{P_c} = \frac{A_{33}}{D}, \tag{8.41}$$

$$\frac{1}{P_d} = \frac{A_{44}}{D}. \tag{8.42}$$

Лекція 9. Дослідження точності середньої квадратичної похибки

9.1. Зв'язок між центральними моментами і середньою квадратичною похибкою

Формули, за допомогою яких оцінюється точність зрівноважених елементів залежності і функції, визначених в результаті фінансово-економічного експерименту величин, виражаються, як ми бачили, через середню квадратичну похибку результатів визначень

$$m_y = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}. \tag{9.1}$$

В даному випадку мається на увазі, що число визначень n являється дуже великим. В практиці ж експериментальних фінансово-економічних досліджень число визначень буває невеликим. Тому і середня квадратична похибка визначається також з деякою похибкою.

Перед виведенням похибки середньої квадратичної похибки розглянемо зв'язок між центральними моментами різних порядків і середньою квадратичною похибкою при нормальному розподілі.

На основі теорії ймовірностей представимо центральний момент у вигляді:

$$\mu_k = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - M_x\right)^k e^{-\frac{(x-M_x)}{2m^2}} dx, \tag{9.2}$$

де x – результат визначення;

M_x – математичне сподівання результату визначення експериментальних даних;

m – середня квадратична похибка.

Нехай,

$$\frac{x - M_x}{m\sqrt{2}} = z, \tag{9.3}$$

звідки

$$dx = m\sqrt{2}\, dz. \tag{9.4}$$

Тоді вираз момента перетвориться:

$$\mu_k = \frac{\left(m\sqrt{2}\right)^k}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} z^k \, e^{-z^2} dz \ . \qquad (9.5)$$

Проінтегруємо отриманий вираз по частинам, прийнявши

$$z^{k-1} = U; \quad dV = ze^{-z^2} dz = -\frac{d\left(e^{-z^2}\right)}{2} ,$$

звідки

$$dU = (k-1)\, z^{k-2} dz; \quad V = -\frac{1}{2} e^{-z^2} \ .$$

Таким чином,

$$\mu_k = \frac{\left(m\sqrt{2}\right)^k}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} z^k \, e^{-z^2} dz = \frac{\left(m\sqrt{2}\right)^k}{\sqrt{\pi}} \left(-\frac{1}{2} z^{k-1} \, e^{-z^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{k-1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} z^{k-2} \, e^{-z^2} dz \right).$$

При $z \to +\infty$ перший член в дужках прямує до нуля, тому що e^{-z^2} прямує до нуля.

Тому

$$\mu_k = \frac{k-1}{2} \cdot \frac{\left(m\sqrt{2}\right)^k}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} z^{k-2} \, e^{-z^2} dz \ . \qquad (9.6)$$

Із (9.5) слідує, що момент порядку $k-2$

$$\mu_{k-2} = \frac{\left(m\sqrt{2}\right)^{k-2}}{\sqrt{2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} z^{k-2} \, e^{-z^2} dz \ . \qquad (9.7)$$

Порівнюючи (9.6) і (9.7), бачимо, що

$$\mu_k = \mu_{k-2} (k-1)\, m^2 . \qquad (9.8)$$

Отримана рекурентна формула дає можливість виразити будь-який центральний момент парного порядку при нормальному розподілі через середню квадратичну похибку.

Із формули (9.8) слідує

$$\mu_2 = m^2; \quad \mu_4 = 3m^4; \quad \mu_6 = 15m^6 \quad \text{і т. і.} \qquad (9.9)$$

Нехай при обмеженій кількості експериментальних визначень отримано значення середньої квадратичної похибки:

$$m_0 = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \; . \qquad (9.10)$$

Позначимо точне значення середньої квадратичної похибки через m і складемо різницю

$$\delta = m^2 - \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_n^2}{n} \; . \qquad (9.11)$$

Якщо маємо n рядів по k похибок Δ в кожному ряду, то можна скласти k різниць $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$.

Величина

$$m_{m^2} = \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{k}} \qquad (9.12)$$

буде представляти собою середню квадратичну похибку величини m_0^2.

Піднесемо до квадрату обидві частини рівності (9.11)

$$\begin{aligned} \delta^2 = m^4 - \frac{2}{n} m^2 \left(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_n^2\right) + \frac{1}{n^2}\left(\Delta_1^4 + \Delta_2^4 + \Delta_3^4 + \ldots + \Delta_n^4\right) + \\ + \frac{1}{n^2}\left(\Delta_1^2\Delta_2^2 + \Delta_1^2\Delta_3^2 + \ldots + \Delta_i^2\Delta_j^2 + \ldots + \Delta_n^2\Delta_{n-1}^2\right). \end{aligned} \qquad (9.13)$$

9.2. Математичне сподівання

Знайдемо математичне сподівання величини δ^2, використавши властивості математичного сподівання.

1. Математичне сподівання постійної величини C дорівнює цій постійній:

$$M[C] = C . \qquad (9.14)$$

2. Математичне сподівання добутку постійної величини на випадкову величину дорівнює добутку постійної на математичне сподівання випадкової величини:

$$M[CX] = CM[X] . \qquad (9.15)$$

3. Математичне сподівання суми постійної і випадкової величин дорівнює постійній величині плюс математичне сподівання випадкової величини:

$$M\,[C+X]=C+M\,[X]. \tag{9.16}$$

Із властивостей 2 і 3 випливає, що математичне сподівання лінійної функції $y=kx+b$ випадкової величини X дорівнює тій же лінійній функції від математичного сподівання величини X:

$$M\,[Y]=kM\,[X]+b. \tag{9.17}$$

4. Математичне сподівання суми двох або декількох випадкових величин $X+Y+Z+...$ дорівнює сумі їх математичних сподівань:

$$M\,[X+Y+Z+...]=M\,[X]+M[Y]+M[Z]+... \tag{9.18}$$

Такими ж властивостями характеризується і середнє арифметичне емпіричного розподілу.

5. Математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань:

$$M\,[X_1X_2\,...\,X_n]=M[X_1]M[X_2]\;...\;M[X_n]. \tag{9.19}$$

8.3. Похибка середньої квадратичної похибки

$$\begin{aligned}M\left(\delta^2\right)&=m^4-\frac{2}{n}\,m^2\left(M\left(\Delta_1^2\right)+M\left(\Delta_2^2\right)+...+M\left(\Delta_n^2\right)\right)+\frac{1}{n^2}\left(M\left(\Delta_1^4\right)+M\left(\Delta_2^4\right)+....+M\left(\Delta_n^4\right)\right)+\\&+\frac{1}{n^2}\left(M\left(\Delta_1^2\Delta_2^2\right)+M\left(\Delta_1^2\Delta_3^2\right)+...+M\left(\Delta_i^2\Delta_j^2\right)+...+M\left(\Delta_n^2\Delta_{n-1}^2\right)\right).\end{aligned} \tag{9.20}$$

Так як визначення рівноточні, то

$$M\left(\Delta_1^2\right)=M\left(\Delta_2^2\right)=\;...\;=M\left(\Delta_n^2\right)=\mu^2\,.$$

Число складових цього виду рівне n.

Далі, із тих же міркувань

$$M\left(\Delta_1^4\right)=M\left(\Delta_2^4\right)=\;...\;=M\left(\Delta_n^4\right)=\mu^4\,.$$

Число складових цього виду також рівне n.

В силу незалежності визначень у відповідності з (9.19) і рівноточності визначень

$$M\left(\Delta_1^2\Delta_2^2\right)= \ ... = M\left(\Delta_i^2\Delta_j^2\right)= ... = M\left(\Delta_n^2\Delta_{n-1}^2\right)= \mu_2\mu_2 = \mu_2^2 \ .$$

Число складових цього виду рівне $n(n-1)$.

Тому

$$M\left(\delta^2\right)= m^4 - 2\frac{m^2}{n}\ n\mu_2 + \frac{n}{n^2}\mu_4 + \frac{n(n-1)}{n^2}\ \mu_2^2 \ . \qquad (9.21)$$

Але згідно з (9.5)

$$\mu_2^2 = m^2m^2 = m^4 ,$$

$$\mu_4 = 3m^4 .$$

А у відповідності з

$$\mu_2 = D[X] = M[(X - M_x)^2], \qquad (9.22)$$

$$M\left(\delta^2\right)= D(m_0) = m_{m^2}^2 \ .$$

Тому

$$m_{m^2}^2 = m^4 - 2m^4 + 3\frac{m^4}{n} + \frac{n-1}{n}m^4 \ . \qquad (9.23)$$

або

$$m_{m^2}^2 = \frac{2}{n}m^4 \ . \qquad (9.24)$$

Звідки

$$m_{m^2} = m^2\sqrt{\frac{2}{n}} \ . \qquad (9.25)$$

Величина m_{m^2} є похибкою квадрату середньої квадратичної похибки m_0^2. Для того, щоб отримати похибку квадрату середньої квадратичної похибки, необхідно, як було раніше сказано, про диференціювати m_0^2 по змінній величині.

$$m_{m^2} = \frac{\partial m_0^2}{\partial y} = 2m_0 m_{m_0} \ . \qquad (9.26)$$

Підставивши це у (9.12), отримаємо

$$2m_0 m_{m_0} = m^2 \sqrt{\frac{2}{n}} \ , \tag{9.27}$$

або, нехтуючи величинами другого порядку малості,

$$m_{m_0} = m_0 \sqrt{\frac{1}{2n}} \ . \tag{9.28}$$

Таким чином,

$$m = m_0 \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2n}} \right). \tag{9.29}$$

або

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2n}} \right). \tag{9.30}$$

Якщо середня квадратична похибка виражена через суму квадратів відхилень від ймовірнішого значення, то в знаменнику виразу (9.30) буде замість n стояти число надлишкових спостережень:

$$m = \sqrt{\frac{[VV]}{n-k}} \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2(n-k)}} \right). \tag{9.31}$$

Таким чином, похибка середньої квадратичної похибки, підрахованої по сумі квадратів відхилень, буде тим більшою, чим менше число надлишкових спостережень.

8.4. Розрахунок середніх квадратичних похибок нормованої величини

Нехай маємо ряд випадкових похибок ξ_i .

Програма №6 генерування випадкових чисел на програмованому мікрокалькуляторі CITIZEN SRP-350 :

1. 2 nd
2. FIX
3. 2 ENTER
4. MATH
5. 2 Rand ENTER

1. Розраховують середнє арифметичне генерованих псевдовипадкових чисел $\xi_{\text{ср}}$:

$$\xi_{\text{ср}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i}{n}. \qquad (9.32)$$

2. Знаходять попередні значення істинних похибок за формулою:

$$\Delta'_i = \xi_i - \xi_{\text{ср}}. \qquad (9.33)$$

3. Обчислюють середню квадратичну похибку попередніх значень істинних похибок:

$$m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta'_i}{n}}. \qquad (9.34)$$

4. Визначають коефіцієнт пропорційності k для визначення істинних похибок Δ_i необхідної точності:

$$k = \frac{C}{m_{\Delta'}}, \qquad (9.35)$$

де C – необхідна нормативна константа.

5. Істинні похибки розраховуються за формулою:

$$\Delta_i = \Delta'_i \cdot k. \qquad (9.36)$$

6. Заключним контролем служить розрахунок середньої квадратичної похибки m_Δ генерованих істинних похибок Δ:

$$m_\Delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta^2}{n}}. \qquad (9.37)$$

і порівняння

$$m_\Delta = C. \qquad (9.38)$$

Программа №7 [ERROR] розрахунку генерованих істинних похибок при $n = 10$.

№	Оператори
1.	INPUT C, A, B, D, E, F, G, H, I, J, K;
2.	L = (A + B + D + E + F + G + H + I + J + K) /10;
3.	A = A – L; B = B – L; D = D – L; E = E – L;
4.	F = F – L; G = G – L; H = H – L; I = I – L; J = J – L; K = K – L;
5.	LABEL 1: ;
6.	M = $\sqrt{}$ ((A^2 + B^2 + D^2 + E^2 + F^2 + G^2 + H^2 + I^2 + J^2 + K^2) /10);
7.	PRINT "M =", M; ▲;
8.	N = C/M;
9.	A = AN; B = BN; D = DN; E = EN;
10.	F = FN; G = GN; H = HN; I = IN; J = JN; K = KN;
11.	GOTO 1;
12.	END

Программа №8 [CONTROL] контрольного розрахунку результатів зрівноваження

№	Оператори
1.	INPUT B, C, D, E;
2.	LABEL 1: ;
3.	INPUT F, G, H, I;
4.	J = BF + CG + DH + EI;
5.	PRINT "J =", J; ▲;
6.	GOTO 1;
7.	END

Спочатку набирають коефіцієнти полінома *a, b, c, d*, а після записують в регістр A поточне значення x_i, яке викликається з пам’яті кожний раз, підводиться до кубу, квадрату і підставляється у змінні F, G. В кінці для значення I набирається одиниця.

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ .$$

Література

1. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗОВ. – М.: Наука, 1980, – 975 с.
2. Бугір М.К. Математика для економістів.Київ, Видавничий центр «Академія», 2003,-519 с.
3. Вища математика: Підручник /За ред. Шинкарика М.І. – Тернопіль: видавництво Карп'юка, 2003. – 480 с.
4. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник. – К.: А.С.К., 2001. – 648 с.
5. Козира В.М. Елементарна та вища математика: Довідник для учнів, вступників до ВУЗів, студентів. – Тернопіль: СМП "АСТОН", 2004. – 100 с.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1973. – 831 с.
7. Літнарович Р.М. Лінійна алгебра. Елементи теорії визначників.Курс лекцій, МЕГУ, 2007, – 72 с.
8. Літнарович Р.М. Алгебра матриць.Курс лекцій.МЕГУ, 2007,-108с.
9. Опря А.Т. Статистика. – К.: Центр навчальної літератури, 2005. – 472 с.
10. Очков В.Ф., Хмелюк В.А. От микрокалькулятора к персональному компьютеру /Под ред. А.Б.Бойко. – М.: Изд. МЭЕ, 1990. – 224 с.
11. Статистическая обработка результатов экспериментов на микро-ЭОМ и программируемых калькуляторах /А.А.Костылев, П.В.Миляев, Ю.Д.Дорский и др. – Л.: Энергоатомиздат, 1991. – 304 с.
12. Цыпкин А.Г., Цыпкин Г.Г. Математические формулы. Алгебра. Геометрия. Математический анализ: Справочник. – М.: Наука, 1985. – 128 с.

П Р О Г Р А М И

№1. Розрахунок визначника розміром 4х4 (Лекція 5).

№2. Розрахунок визначника розміром 3х3 (Лекція 5).

№3. Розрахунок коефіцієнтів нормальних рівнянь поліному третьої степені (Лекція 5).

№4. Розрахунок визначника будь-якого порядку на персональному комп'ютері (Лекція 5).

№5. Рішення чотирьох нормальних рівнянь з визначенням ваг по схемі Гауса (Лекція 7).

№6. Генерування випадкових чисел (Лекція 9).

№7. Розрахунок істинних похибок заданої нормованої точності при n=10 (Лекція 9).

№8. Контрольний розрахунок результатів зрівноваження (Лекція 9).

Літнарович Руслан Миколайович,

доцент, кандидат технічних наук

ОСНОВИ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

КУРС ЛЕКЦІЙ

Частина 1

Комп’ютерний набір, верстка, дизайн у редакторі Microsoft®Office®Word Скоробагатий Володимир Вікторович

Міжнародний економіко-гуманітарний університет ім. акад. С.Дем’янчука

Кафедра Математичного моделювання

33027, м. Рівне, вул. акад. С.Дем’янчука, 4